telecom Saint-Etienne

Probabilités et Statistiques

Année 2010/2011

laurent.carraro@telecom-st-etienne.fr

olivier.roustant@emse.fr

Cours °2

Définition d'une probabilité

Modèle probabiliste

Un exemple

On mesure l'épaisseur de pièces. L'épaisseur nominale figurant au cahier des charges est

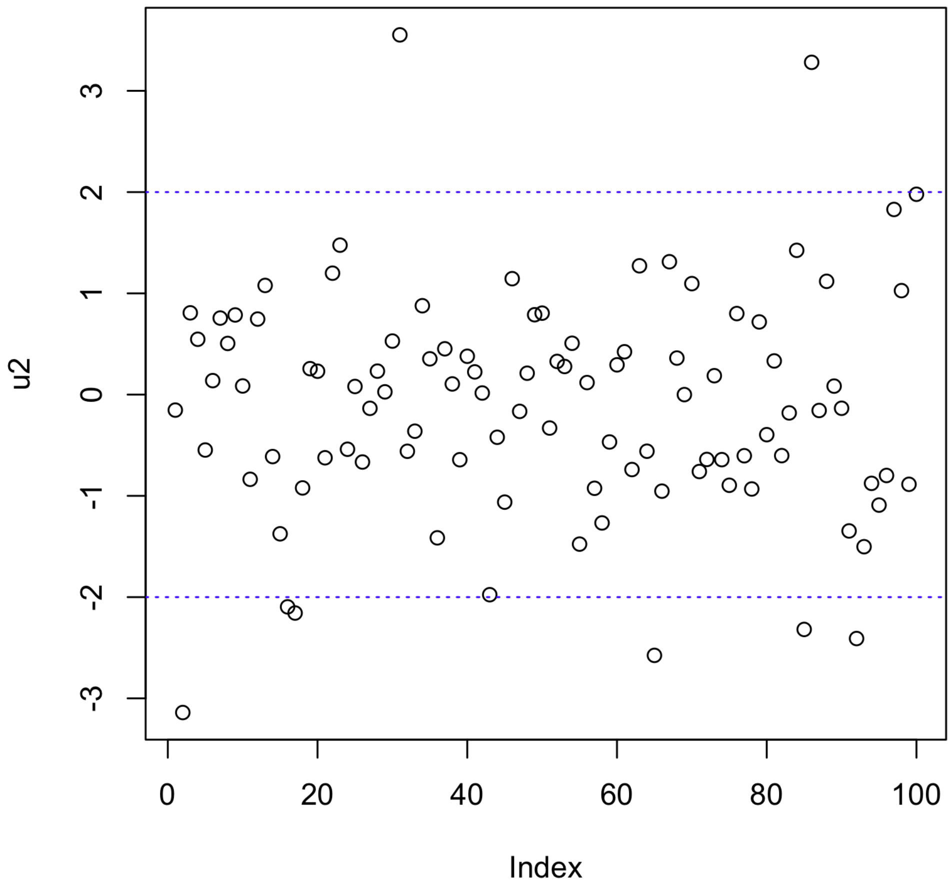
$$x_0 = 50\ \mu m$$

On sait (par expérience) que les écarts par rapport à x_0 sont compris entre -4 et 4.

Quelle est la probabilité d'avoir plus de 2 µm d'écart ? Que l'écart positif soit compris entre 1 et 2 µm ? Entre 1.5 et 2.5 µm ? Entre 2 et 3 µm ?

Un exemple (suite)

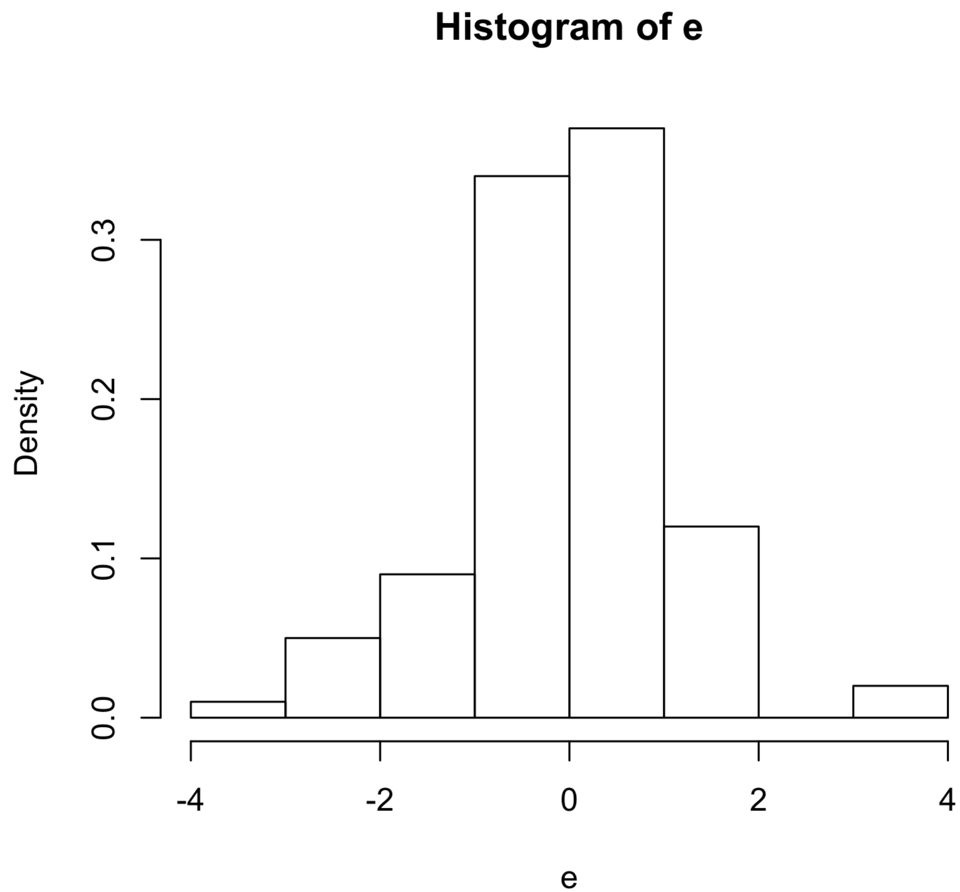
On donne un échantillon de 100 écarts



Un exemple (suite)

- Répartition des écarts

```
> hist(e, freq=FALSE)
```

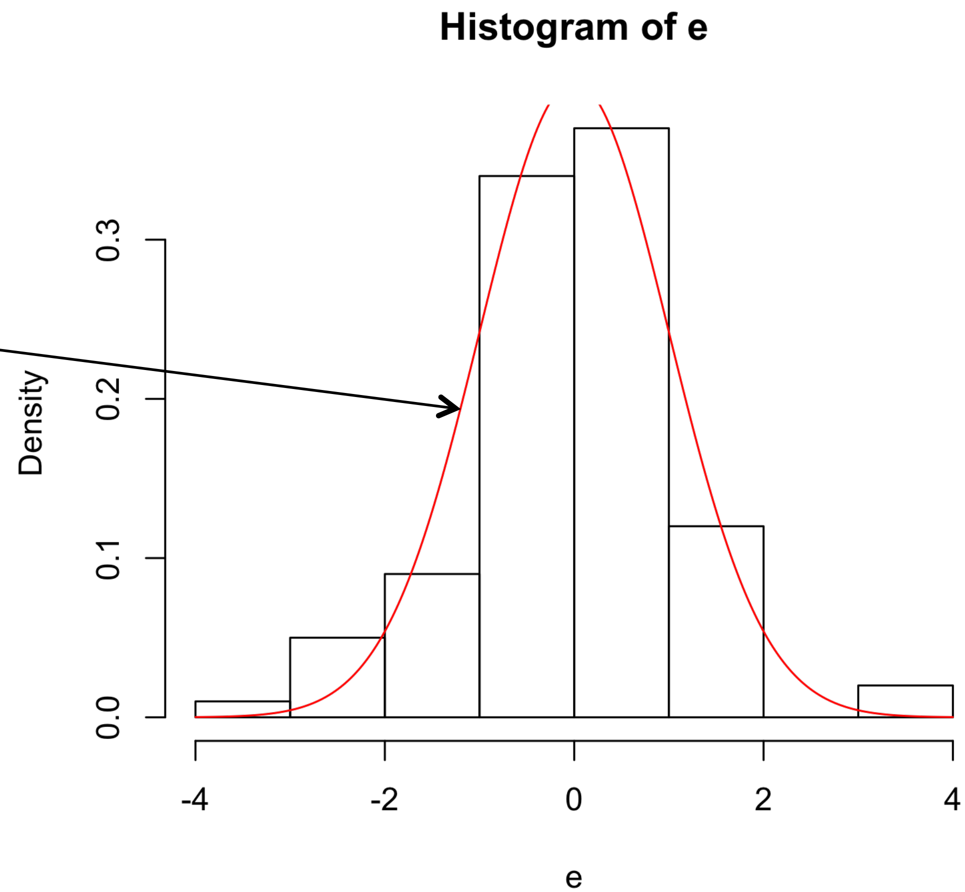


Un exemple (suite)

- Répartition des écarts

"densité de probabilité"
f(x)

… à trouver ! (voir plus tard dans le cours)



Un exemple (suite)

Calcul de probabilité avec la densité de probabilité

- f(x)dx -> probabilité que l'écart soit dans [x;x+dx]
- Donc la probabilité que l'écart appartienne à [a, b] :

$$P([a,b]) = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

- Quelle condition doit vérifier f ?

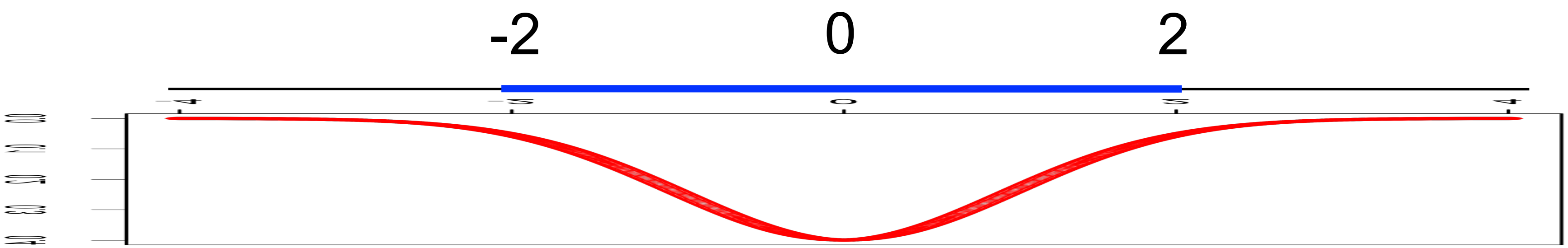
Un exemple (suite)

En particulier $P(|e|>2) = 1 - \int_{-2}^{2} f(x)dx$

$$P(1.5 < e < 2.5) = \int_{1.5}^{2.5} f(x)dx$$

La vision mesure

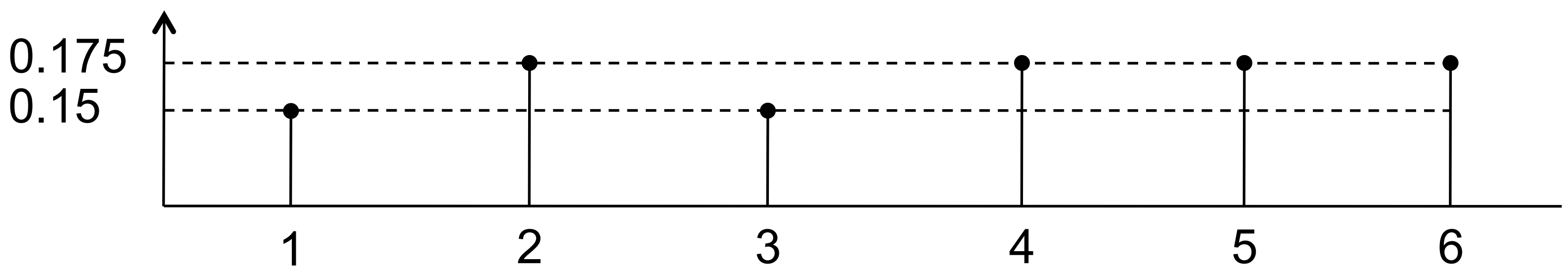
Remarquer l'analogie du problème précédent avec le calcul de la masse du morceau de tige [-2,2], connaissant la densité de masse de la tige f(x)



On parle de mesure à densité, ou mesure continue de support R (la droite réelle)

La vision mesure

Peut-on faire la même analogie avec ce dé à six faces :



On parle de mesure discrète de support {1,2,3,4,5,6}

La vision mesure

Remarque importante : il n'y a pas que des mesures discrètes ou continues

Exemple : données censurées, voir TD

Première définition

Définition (incomplète) d'une mesure

On se donne un ensemble Ω, support des valeurs possibles.

Une mesure μ est une application sur $\wp(\Omega)$ vérifiant :

- $\mu(\varnothing)=0$
- $\mu(\Omega)<+\infty$
- Pour toute séquence d'éléments de $\wp(\Omega)$, $A_1, \ldots, A_n$, alors si les A_k sont deux à deux disjoints,

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1)+\ldots+ \mu(A_n) \qquad \text{(additivité)}$$

Question : Que faut-il rajouter pour obtenir une probabilité ?

Modèle probabiliste

- *Modèle probabiliste*
  - *La définition d'une probabilité dépend donc de Ω.*
  - *Lorsque μ est une probabilité sur $\wp(\Omega)$,*

le triplet $(\Omega, \wp(\Omega), \mu)$ définit un modèle probabiliste

- *Exemple. Ecrire un modèle probabiliste :*
  - *Pour le dé de l'exemple précédent*
  - *Pour le problème de mesure des écarts (à suivre !)*
  - *Pour le jeu de pile ou face avec 1, 2 et n lancers*
  - *Pour des appels téléphoniques reçus par un central, en supposant qu'il n'y a pas plus de 1 appel par seconde*

Quand les possibles sont infinis (1/2)

- Mesure discrète à support infini (loi de Poisson)

Ω=N. On pose : $\forall k \in N$, $P(\{ k \}) = \lambda^k/k!$

Questions

- *Est-ce une probabilité sur $\wp$(N) ? Quelle nouvelle propriété doit-on utiliser pour le vérifier ?*

  -> On parle de σ-additivité
- *Le cas échéant, transformer P pour en faire une probabilité*
- *Donner la définition générale d'une probabilité discrète, et écrire son expression à l'aide de la mesure de Dirac*

Quand les possibles sont infinis (2/2)

- Loi uniforme sur [0,1]

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir uniformément un nombre entre 0 et 1

Questions

- *Quelle est la probabilité de [a,b], pour $0 \leq a < b \leq 1$?*
- *La probabilité est-elle définie à partir d'une densité ?*
- *Soit $A \subset \Omega$. Quelle est la probabilité de A ?*
- *P(A) existe-t-il toujours ?*
- *Quelle est la probabilité de {x}, pour $x \in \Omega = [0,1]$?*
- *Sachant que $\Omega = \cup \{x\}$ pour $x \in \Omega$, que vaut $P(\Omega)$?*

Ne pas trop en ajouter… et bien choisir sa tribu !

Ce que nous apprennent les exemples précédents

On ne peut pas étendre la σ-addivité aux nombres réels

On ne peut pas calculer la probabilité de toute partie de $\Omega \subset R$

La notion de tribu (ou σ-algèbre)

Une tribu est un sous-ensemble de $\wp(\Omega)$ contenant $\varnothing$, stable par passage au complémentaire et réunion dénombrable

Exemples

- $\wp(\Omega)$ est toujours une tribu, mais parfois trop grosse !
- tribu borélienne B(R) : plus petite tribu contenant les intervalles de R -> c'est la tribu utilisée en pratique sur R

Définition d'une probabilité

Définition d'une mesure

On se donne un ensemble Ω, support des valeurs possibles, et une tribu $\Im$, sous-ensemble de « mesurables » de Ω.

Une mesure μ est une application de $\Im$ dans R+ vérifiant :

- $\mu(\emptyset)=0$
- $\mu(\Omega)<+\infty$
- *Pour toute suite dénombrable d'éléments de $\Im$, A_1, …, A_n, … alors si les A_n sont deux à deux disjoints,*

$$\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-additivité})$$

Question : Que faut-il rajouter pour obtenir une probabilité ?

Exercice 1

- *Probabilité et inclusion*

  Montrer que si $A \subseteq B$ alors $P(A) \leq P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

- *Généralisation*
  - *Probabilité d'une réunion d'ensembles emboîtés*

    Soient $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots \subseteq A$, tels que $A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = A$

    alors $P(A) = \lim P(A_n) \quad (n \to +\infty)$
  - *Probabilité d'une intersection d'ensemble emboîtés*

    Soient $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots \subseteq A$, tels que $A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = A$

    alors $P(A) = \lim P(A_n) \quad (n \to +\infty)$

Exercice 2

- *Probabilité (quelconque) et réunion (quelconque)*
  Montrer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- *Généralisation - formule de Poincaré*
  - *Probabilité (quelconque) d'une réunion (quelc.) de 3*
    - *Exprimer $P(A \cup B \cup C)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ et $P(A \cap B \cap C)$*
  - *Généraliser à la réunion de k ensembles*

- *Application : quelle est la probabilité pour qu'au moins une personne récupère son propre manteau si tout le monde choisit au hasard son manteau sur le porte-manteaux ? (voir TD)*

Ω, grand Ω !

- *Exercice : donner un modèle probabiliste pour calculer la probabilité que la durée de vie d'un portable dépasse 3 ans.*

- *Solution : dur, dur… Théoriquement, il faudrait mettre dans Ω toutes les variables censés influer sur la durée de vie (variables de fabrication, d'utilisation, etc.) -> très grand ensemble !*

Comment faire ?

Réponse : cours n°3…