Probabilités et Statistiques

Année 2010/2011

laurent.carraro@telecom-st-etienne.fr

olivier.roustant@emse.fr

Cours n°3

Variables aléatoires

Loi, fonction de répartition, densité

Retour sur le modèle probabiliste

Exemple : Epaisseur d'oxyde sur un wafer

- T (Thickness) est l'épaisseur d'oxyde de silicium sur un wafer obtenue, en nm.
- T dépend d'aléas ω
- Ω est l'univers des possibles :
  - Variation des constituants
  - Variation des conditions de chauffage
- Ω est difficile à expliciter
- La tribu sur Ω est plus difficile à définir :-(
- La probabilité P est encore plus difficile à définir :-<
- On suppose que tout cela existe :-)

Mais…

- On ne veut pas connaître P sur tous les événements.
- On a besoin de :
  - $P(\{\omega \in \Omega, T(\omega) \geq a\})$
  - $P(\{\omega \in \Omega, a \leq T(\omega) \leq b\})$, …
  - Plus généralement : $P(\{\omega \in \Omega, T(\omega) \in A\})$
- Définitions :
  - Une application $X : \Omega \to IR$ est appelée variable aléatoire
    (en théorie, X est supposée "mesurable")
  - L'application : $A \in B(IR) \to P(T \in A)$ est la loi de X
    Cette application est une probabilité sur B(IR)

  On est passé de Ω, ensemble complexe, à IR

La loi d'une variable aléatoire

- **Notations :**

  On notera v.a. pour variable aléatoire

  La loi de la v.a. X est notée μ_X

- **Egalité en loi :**

  X et Y sont dites égales en loi si $\mu_X = \mu_Y$

  Idée de comportements identiques

- **Jeu de pile ou face.**
  - X : gain du joueur 1
  - Y : gain du joueur 2
  - X et Y ont la même loi (laquelle ?), mais $X \neq Y$

Fonction de répartition

- La fonction de répartition F_X d'une v.a. X est définie par :

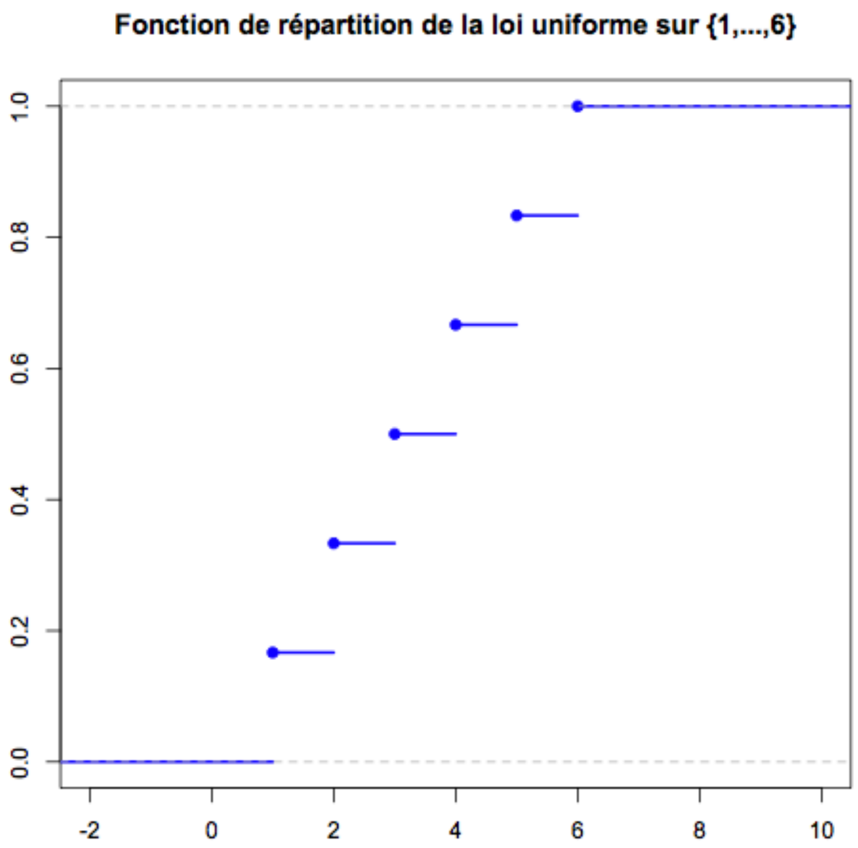
$$F_T(x) = P(T \leq x)$$

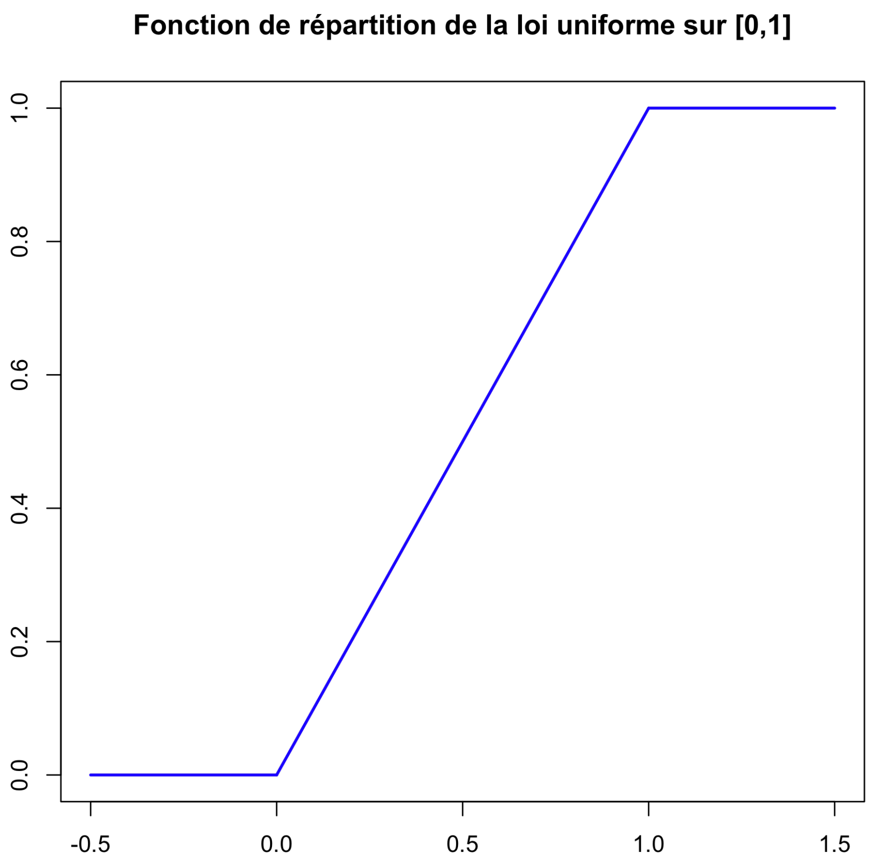
- PROPRIETES
  - La fonction de répartition est croissante et continue à droite. Elle tend vers 0 en $-\infty$, et vers 1 en $+\infty$.
  - La fonction de répartition s'approche à partir d'un échantillon de taille n par la fonction de répartition empirique :

$$F_n(x) = \text{Card}\ \{1 \leq i \leq n,\ t_i \leq x\}/n$$

Exemples

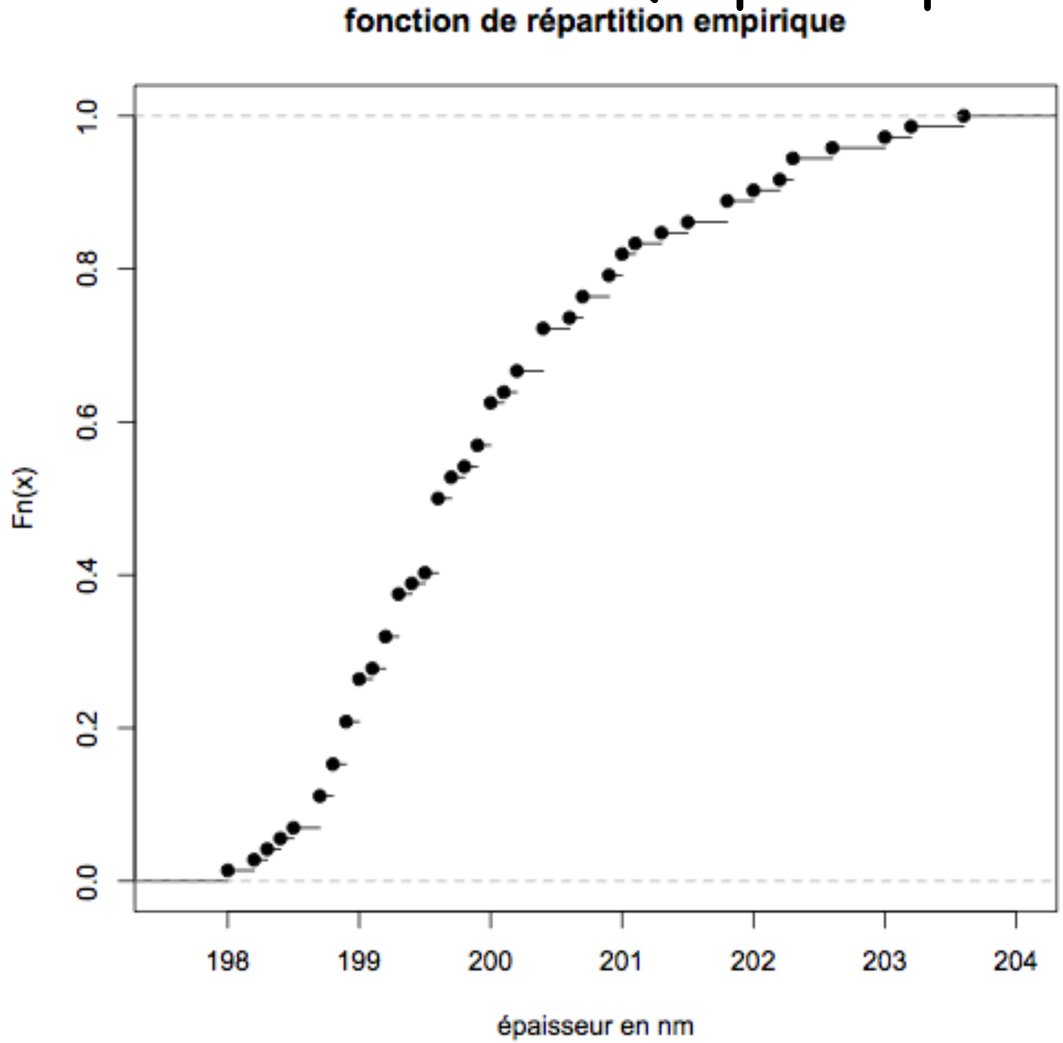
- Fonction de répartition de la loi uniforme sur {1,…,6} et sur [0,1]



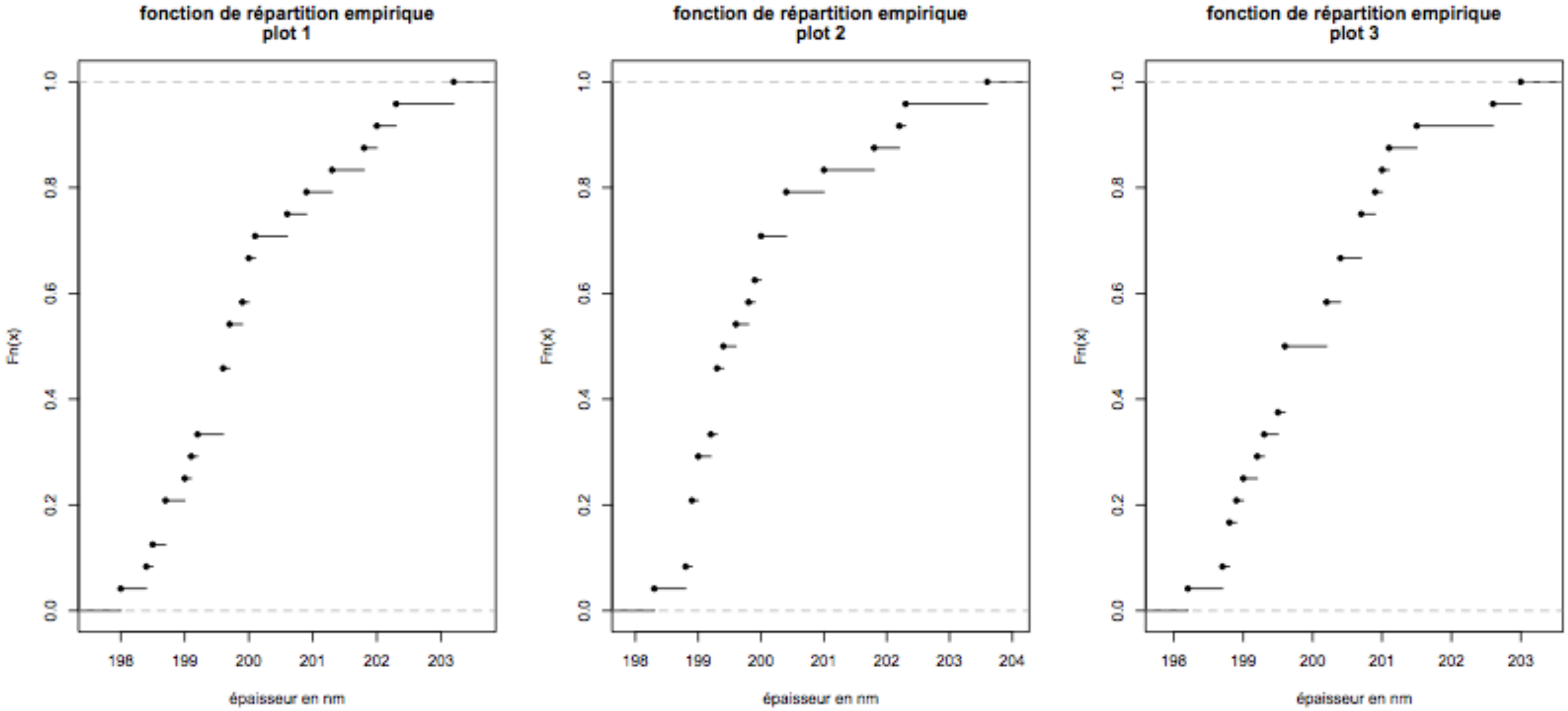


Retour sur l'exemple du wafer

72 = 24*3 observations (3 plots par wafer)



Pour les 3 plots observés



Les 3 v.a. ont-elles la même loi ?

Théorème fondamental

- La fonction de répartition d'une v.a. X détermine sa loi.

En d'autres termes :

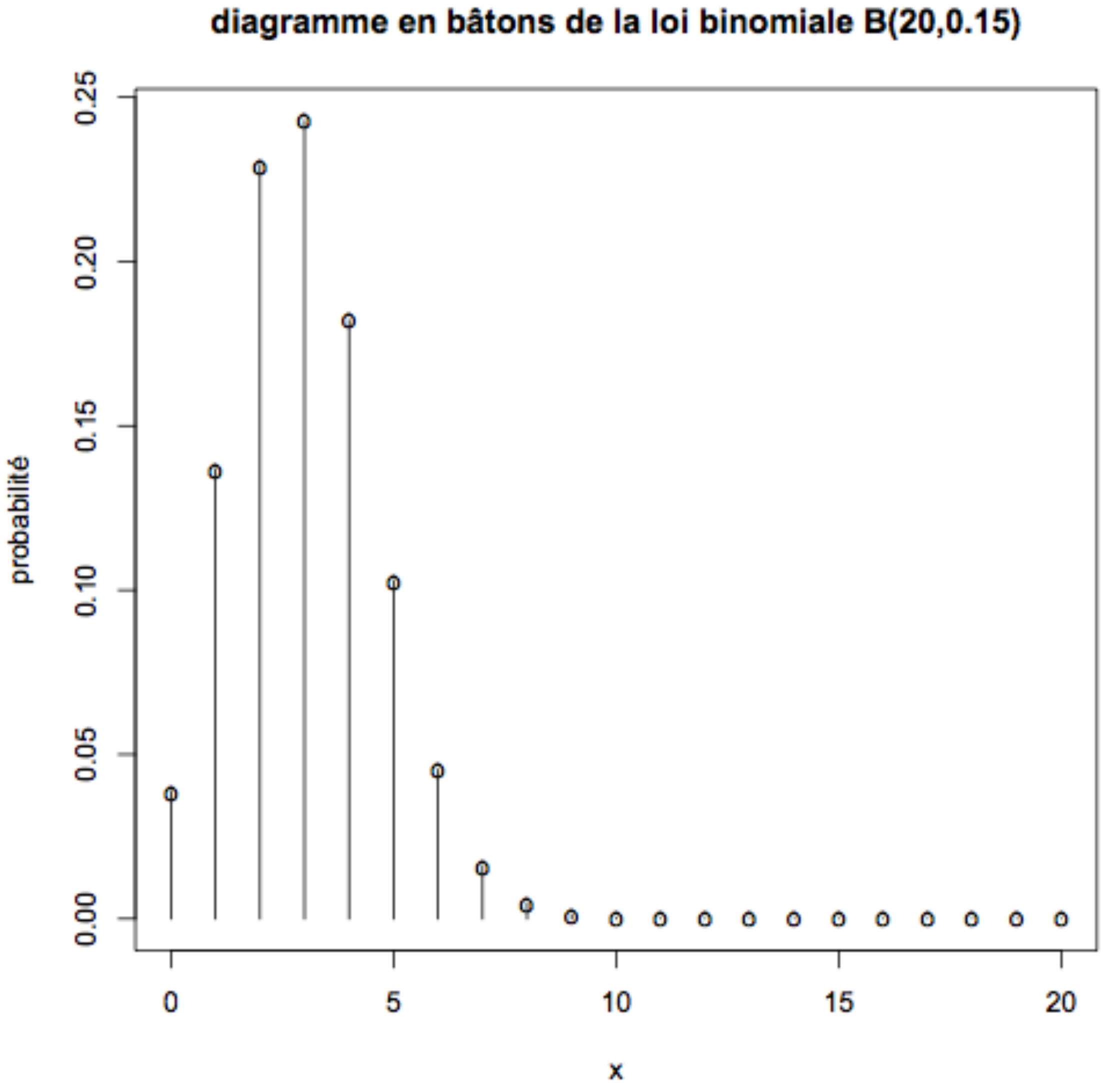
X et Y ont même loi $\Leftrightarrow F_X = F_Y$

On testera cette hypothèse sur un échantillon à partir des fonctions de répartition empiriques

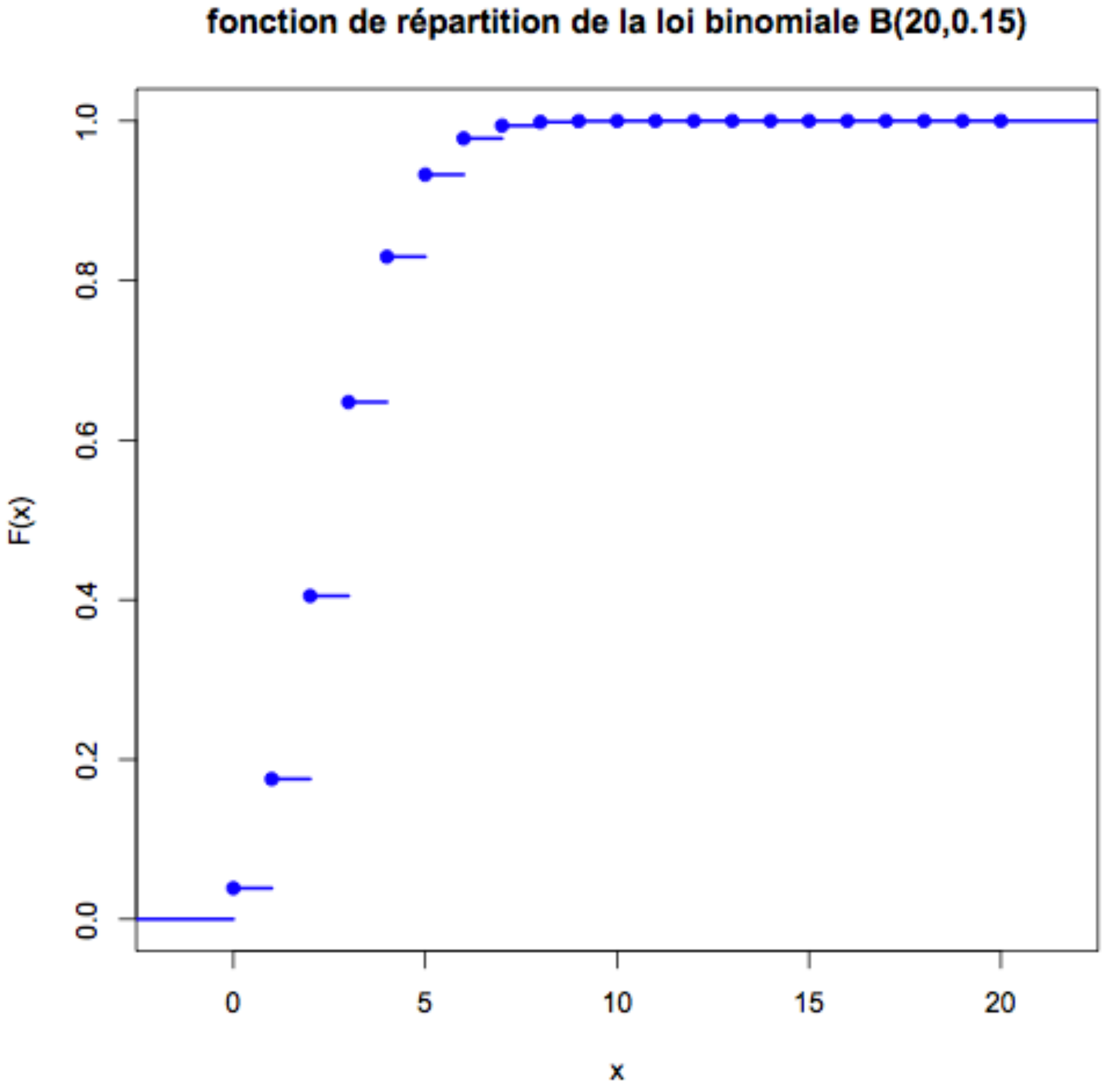
Lien avec la densité

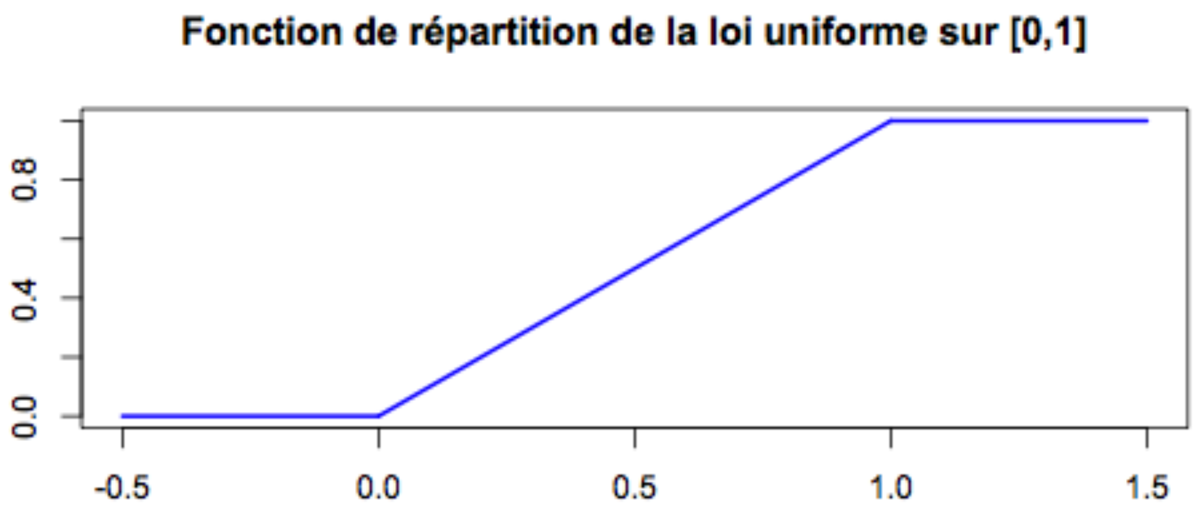
- Supposons que X admette une densité de probabilité $f_X(x)$
- Questions :
  - Quel est le lien entre la fonction de répartition et la densité ?
  - Quelle condition sur la fonction de répartition permet d'assurer l'existence d'une densité ?

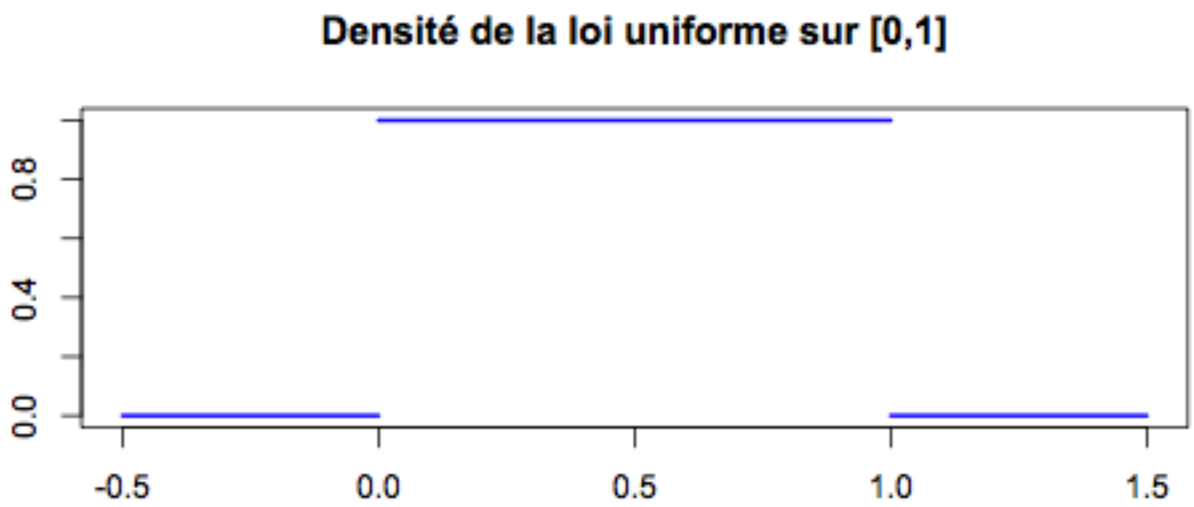
Loi binomiale B(20,0.15)



Loi binomiale B(20,0.15)




Fonction de répartition de la loi uniforme sur [0,1]
0.0
0.4
0.8
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5


Densité de la loi uniforme sur [0,1]
0.0
0.4
0.8
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

Exercice

- Soit X de loi uniforme sur [0,1]
  - Déterminer la fonction de répartition de $Y = 1-X$. Conclusion ?
  - Déterminer la fonction de répartition et la densité des v.a. $Z = 2*X+1$ et $T = X^2$. Donner la représentation graphique de ces fonctions.