Probabilités et Statistiques

Année 2010/2011

laurent.carraro@telecom-st-etienne.fr

olivier.roustant@emse.fr

Cours °4

Lois classiques

simulation

Préambule : Proba. conditionnelle & indépendance

- *Exemple*

  Ω = {population française}, $\Im = \wp(\Omega)$, P=proba. uniforme

  A = {gagner plus de 30k€ / an}

  B = {être une femme}

  On choisit au hasard uniformément un individu dans Ω.

  Quelle est la probabilité pour qu'il gagne plus de 30 k€ ?

  Sachant qu'il s'agit d'une femme, quelle est la probabilité pour qu'il (elle) gagne plus de 30k€ ?

Préambule : Proba. conditionnelle & indépendance

- Propriété / définition
  Soit B un événement de probabilité non nulle. Alors :
  L'application $\boldsymbol{A \to P(A \cap B) / P(B)}$ *est une probabilité sur B*

  Vocabulaire : c'est la probabilité conditionnelle de A sachant B
  Notation : $\mathbf{P(A \mid B)}$

Préambule : Proba. conditionnelle & indépendance

- Définition / propriété - Indépendance

  A et B sont indépendants ssi $\boldsymbol{P(A|B)=P(A)}$ *ssi* $\boldsymbol{P(B|A)=P(B)}$

  ssi $\boldsymbol{P(A \cap B)=P(A)P(B)}$

  Remarques :
  - Symétrie dans la notion d'indépendance
  - La dernière équivalence est valable si P(A)=0 ou P(B)=0

- *Exemple*
  - *Avec 1 dé : A = {6 au 1er lancer}, B={6 au second lancer}*

Lois classiques

Loi de Bernoulli – loi binomiale

- Une variable aléatoire X prend deux valeurs possibles codées par 0 et 1. Loi de X ?

  Si $p = P(X=1)$, alors $P(X=0) = 1-p$

  C'est la loi de Bernoulli $B(p)$

- Situation très courante :
  - sondages d'opinion
  - contrôle de qualité
  - présence ou absence (ex : spams parmi les mails, maladie parmi une population,…)
  - …

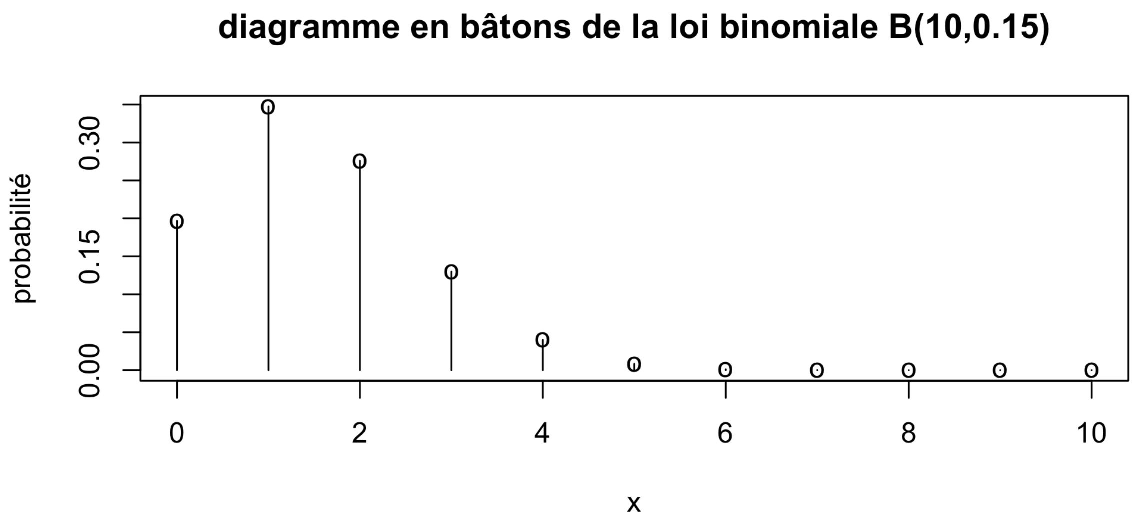
Loi binomiale

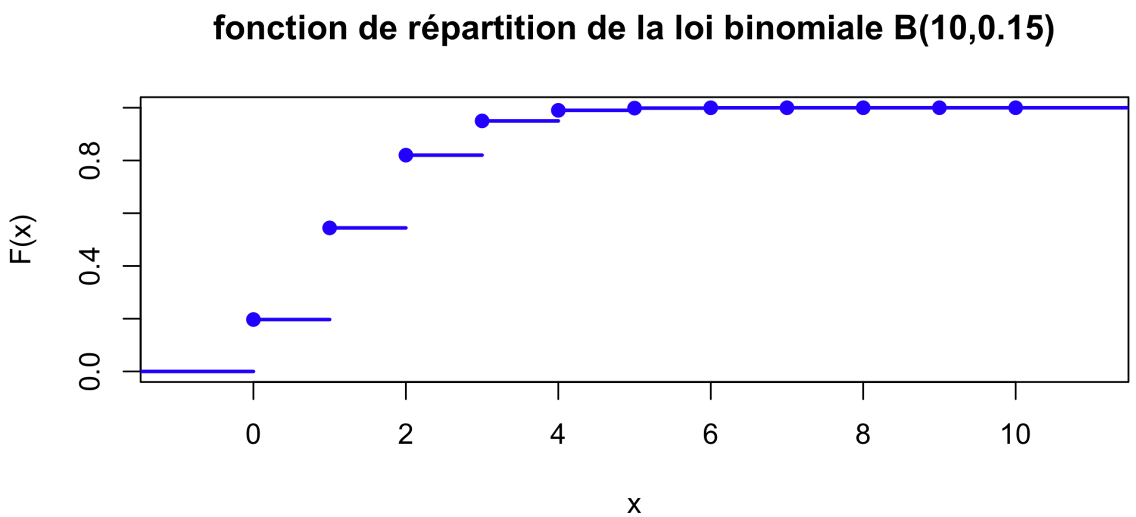
- X est une v.a. de loi binomiale B(n,p) si :
  - $n \in N^*, p \in [0,1]$
  - Pour $k \in \{0,1,...,n\}$

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$$

- X est le nombre de succès lorsque l'on répète n expériences de Bernouilli B(p), indépendantes :
  - $X = X_1 + \ldots + X_n$
  - où les v.a. X_i sont indépendantes, de loi B(p)

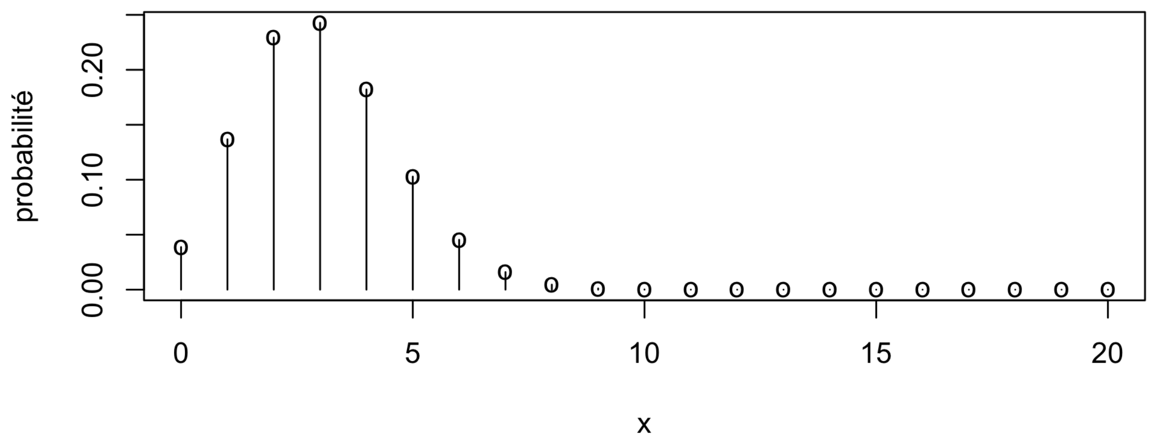
Loi binomiale B(10,0.15)



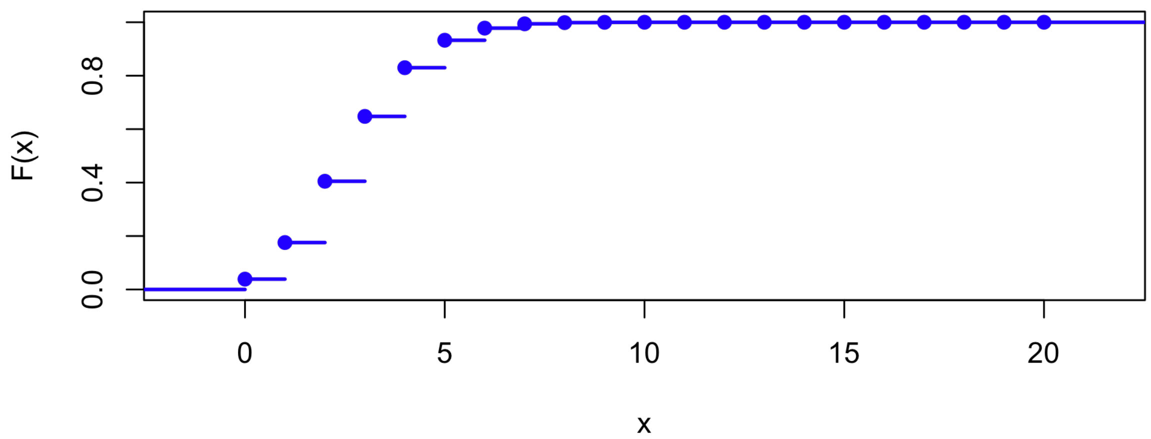


Loi binomiale B(20,0.15)

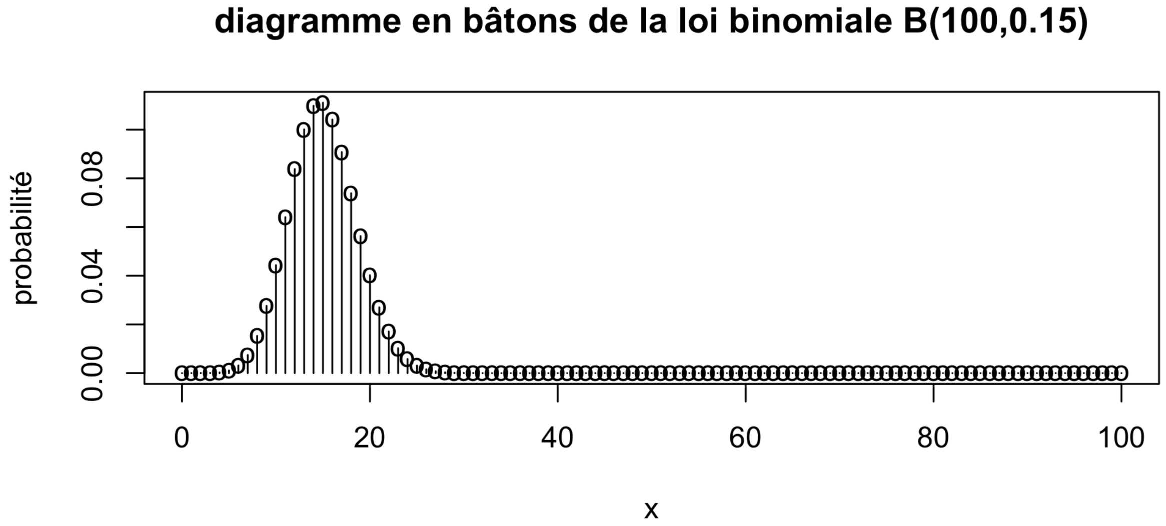
diagramme en bâtons de la loi binomiale B(20,0.15)

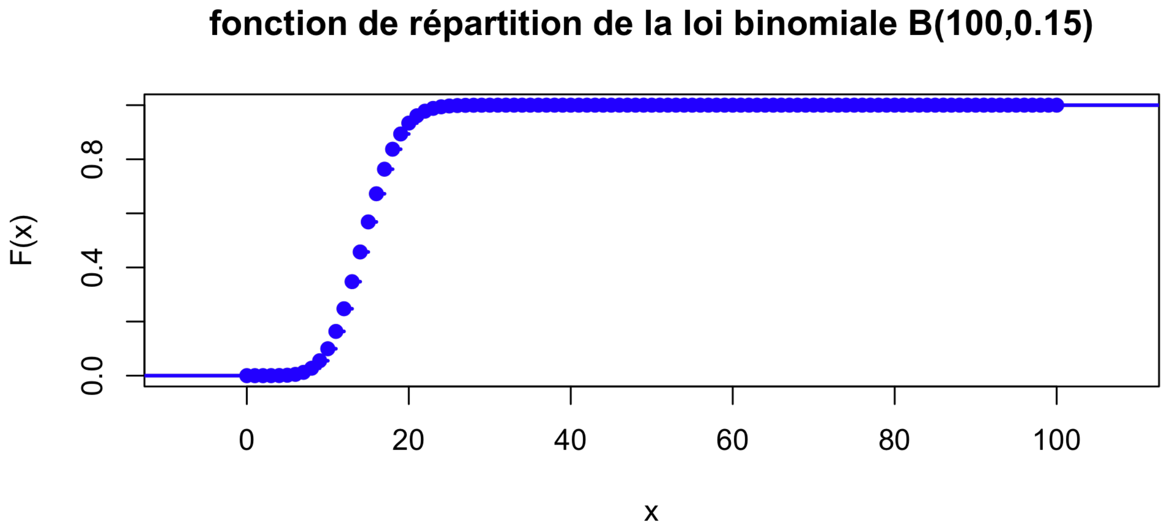


fonction de répartition de la loi binomiale B(20,0.15)



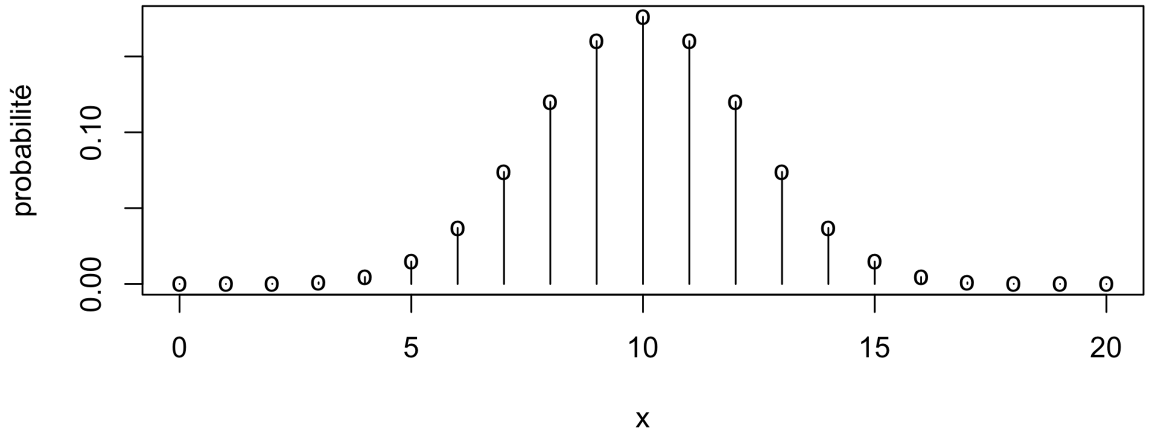
Loi binomiale B(100,0.15)



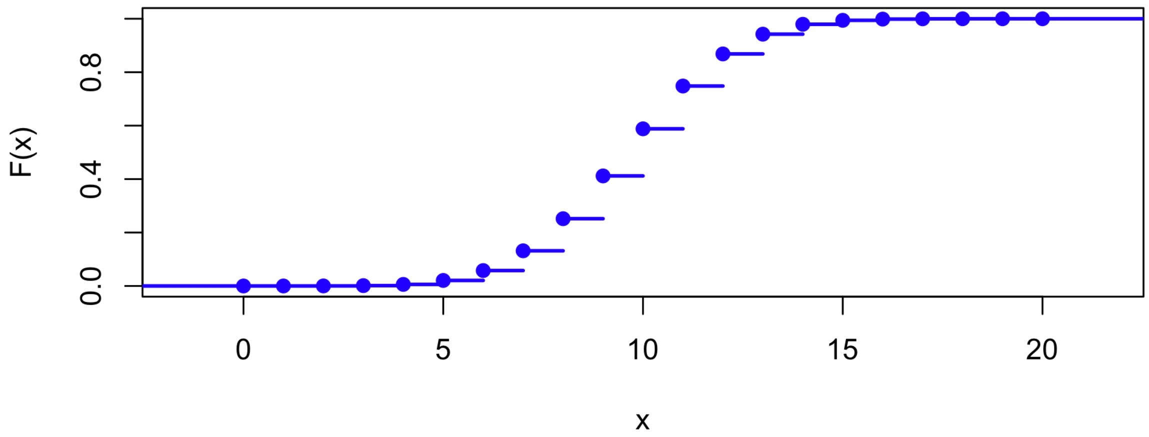


Loi binomiale B(20,0.5)

diagramme en bâtons de la loi binomiale B(20,0.5)



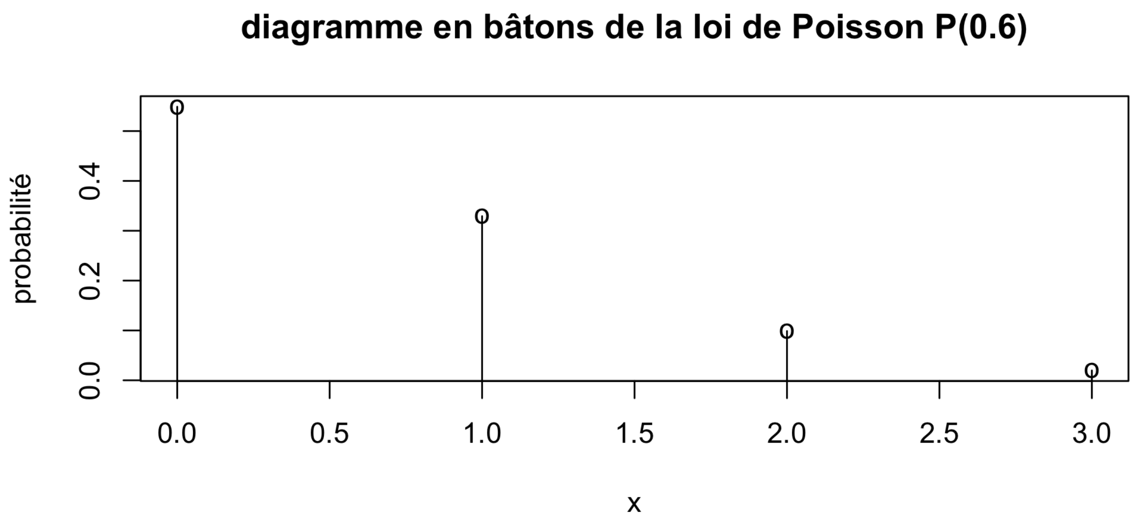
fonction de répartition de la loi binomiale B(20,0.5)

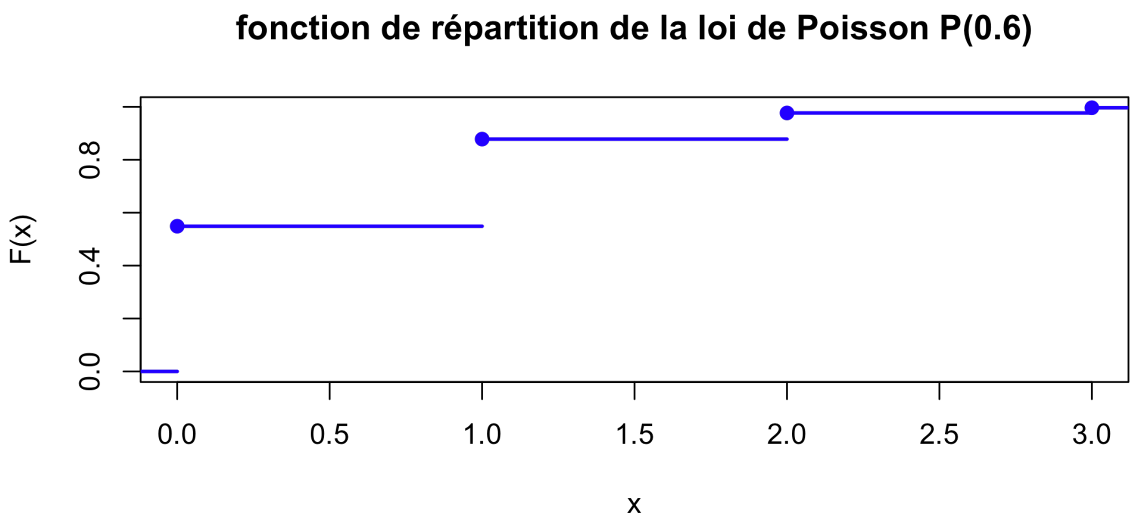


Loi de Poisson

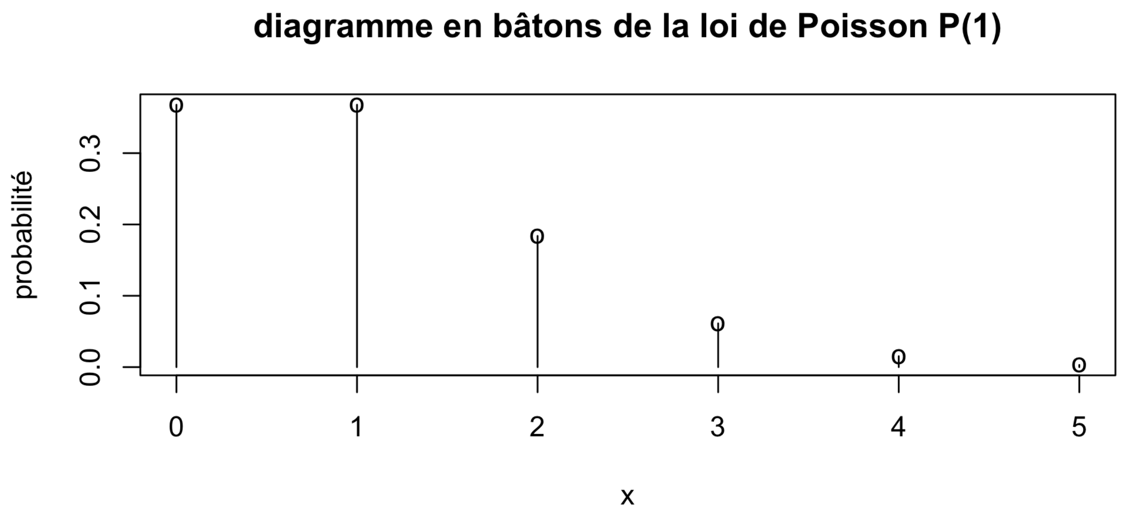
- N suit la loi de Poisson P(λ) si :
  - $\lambda > 0$
  - Pour $n \in N$ $\qquad P(N = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$
- En pratique, N mesure un nombre aléatoire non limité :
  - nombre d'appels à un standard téléphonique
  - nombre de désintégrations d'atomes radioactifs
  - nombre d'emails reçus
  - …
- La loi de Poisson est la loi des télécoms !

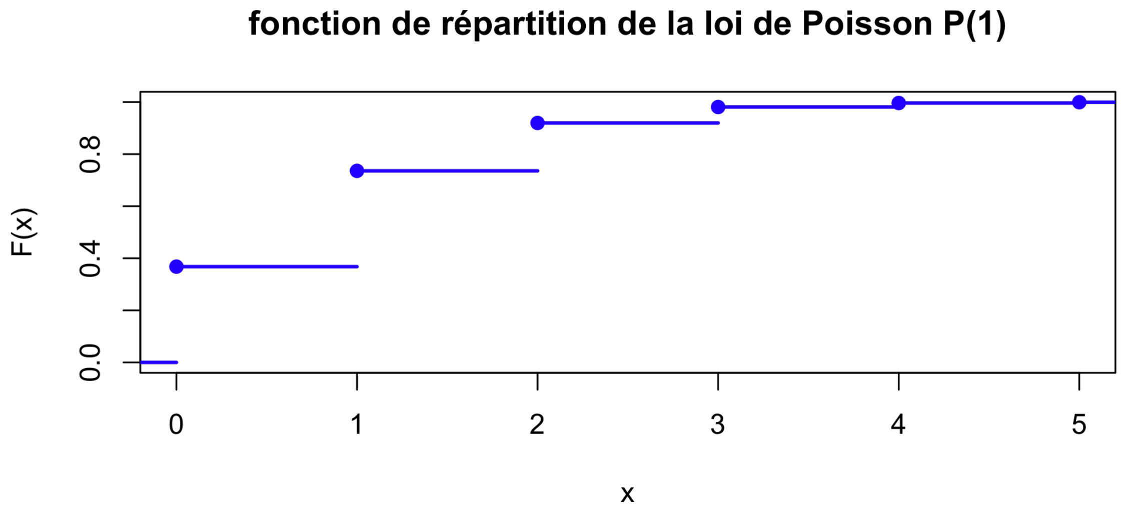
Loi de Poisson P(0.6)



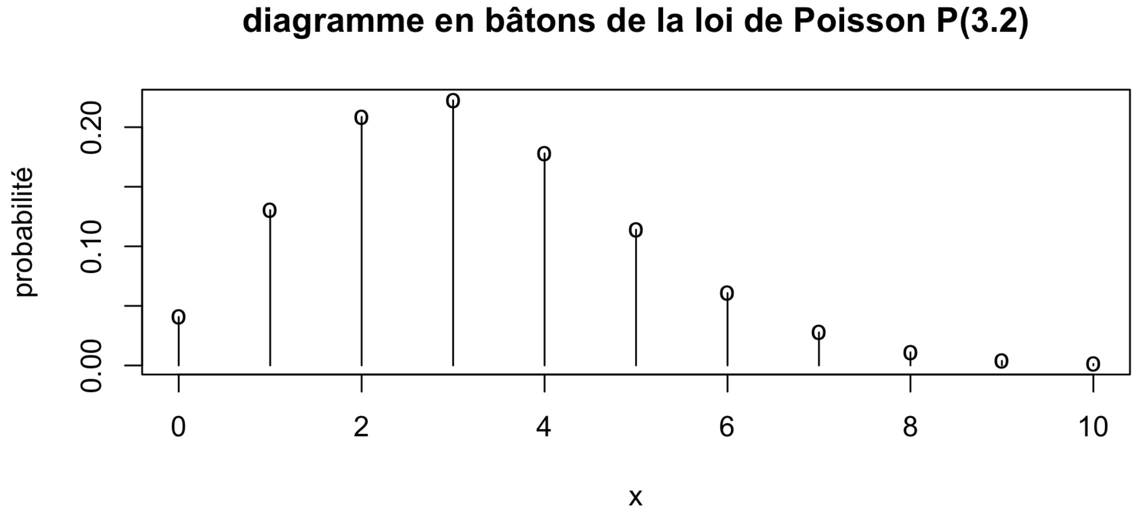


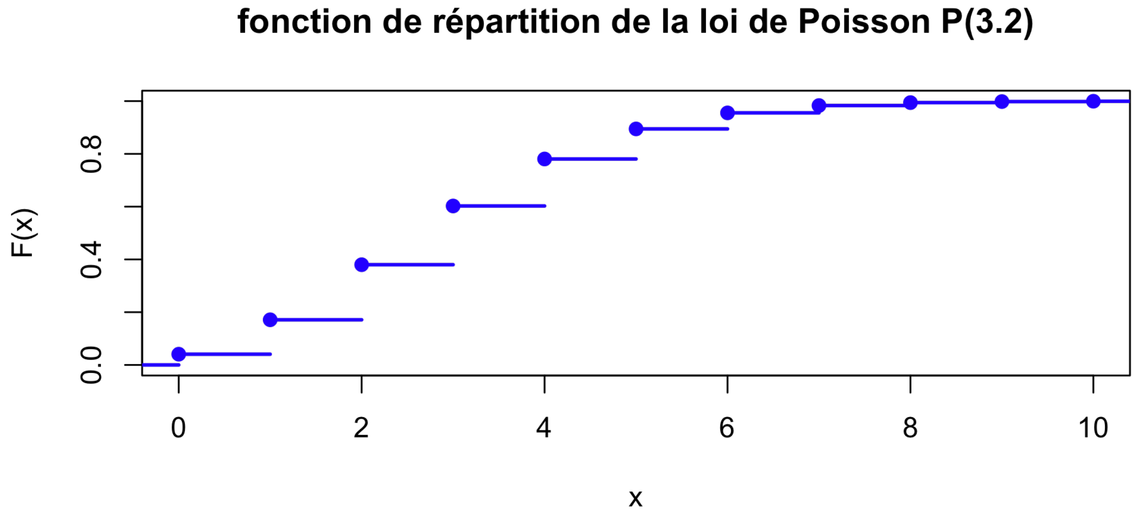
Loi de Poisson P(1)



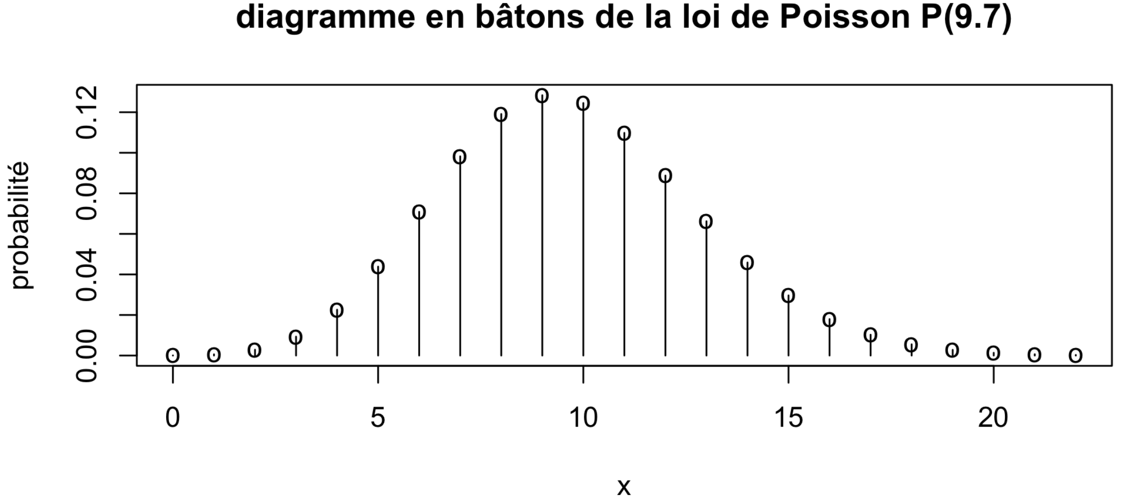


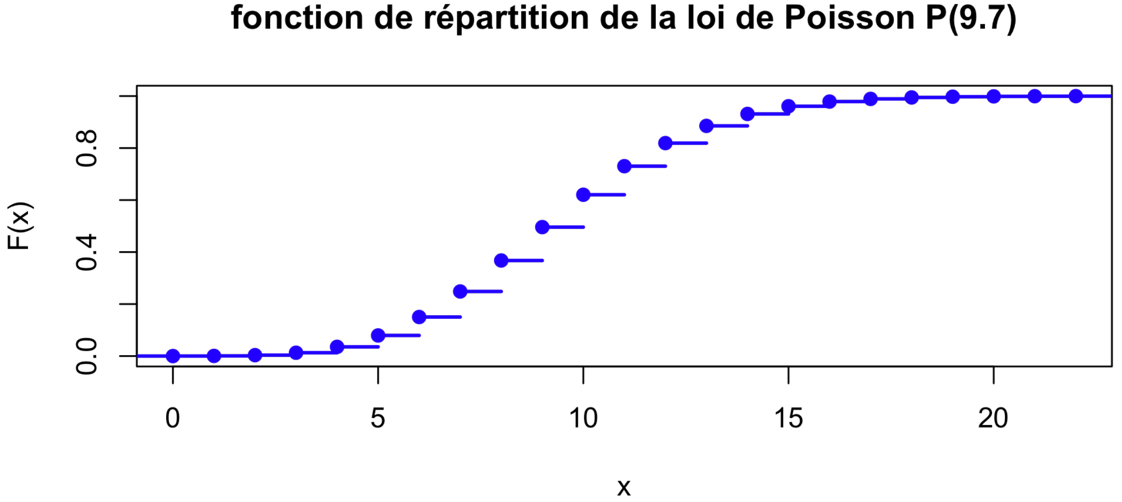
Loi de Poisson P(3.2)





Loi de Poisson P(9.7)

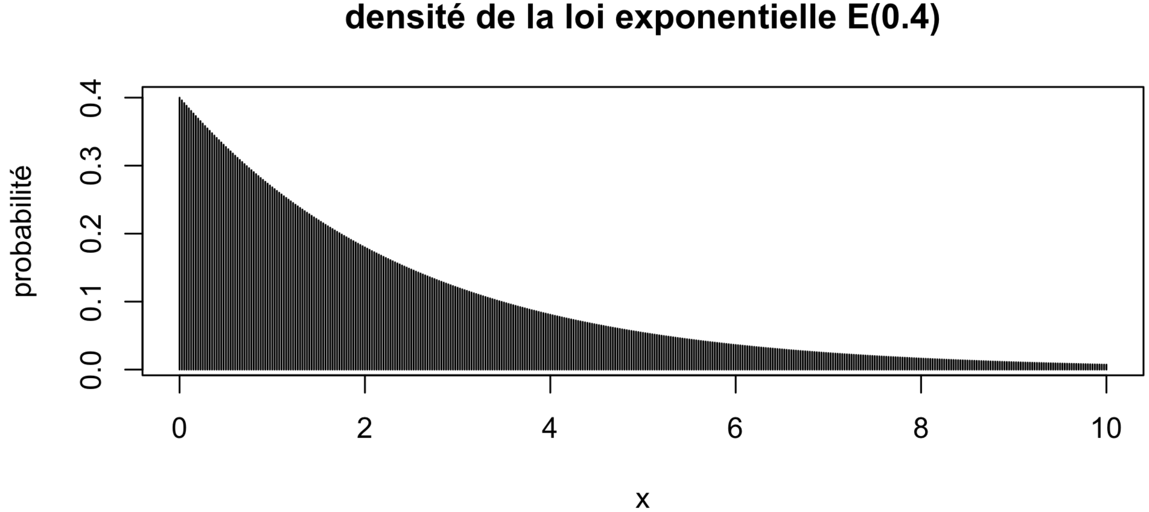


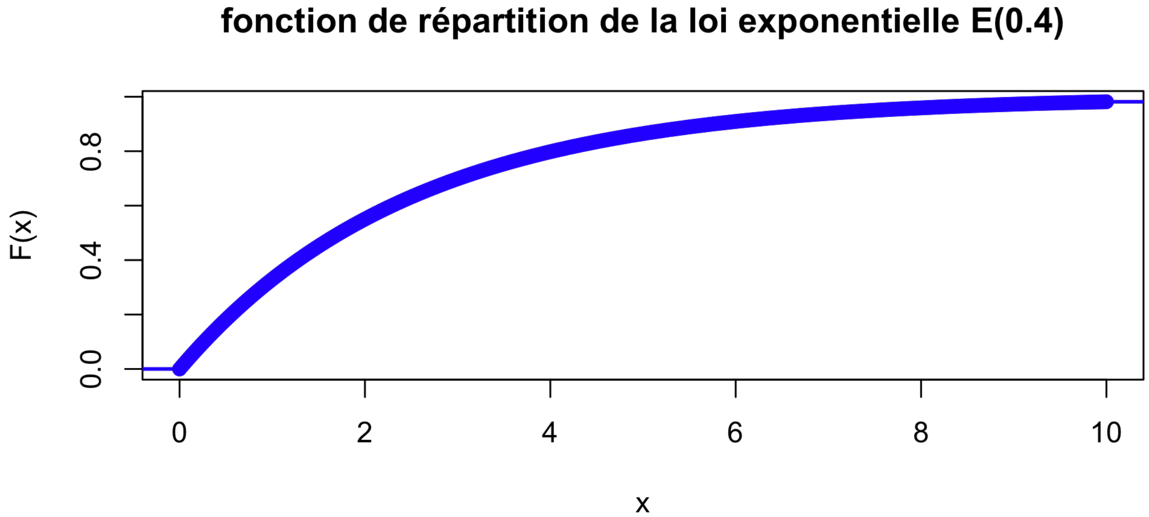


Loi exponentielle

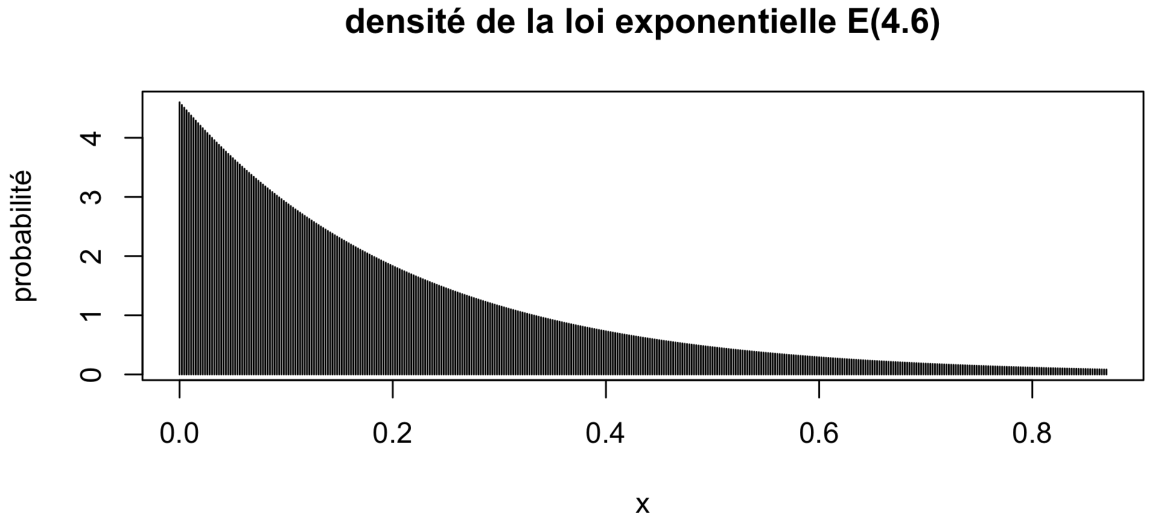
- X suit la loi exponentielle E(λ) si :
  - $\lambda > 0$
  - X est de densité : $f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0$
- En pratique, X mesure un temps d'attente avant l'arrivée d'un phénomène :
  - arrivée d'un autobus
  - arrivée d'un client, d'un email
  - arrivée d'une désintégration dans une substance radioactive
  - …
- Loi liée à la loi de Poisson (cf. TD)

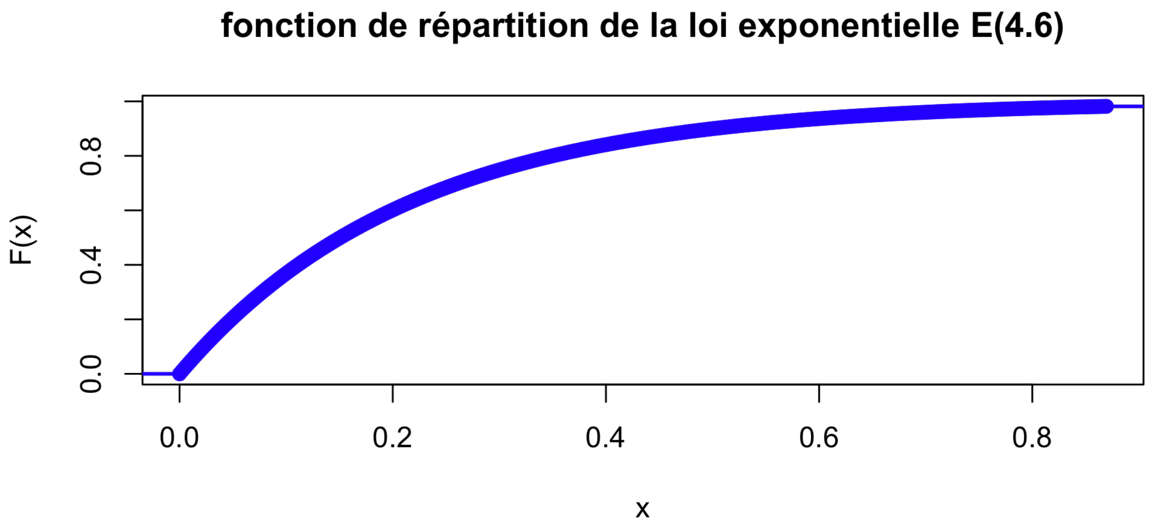
Loi exponentielle E(0.4)





Loi exponentielle E(4.6)





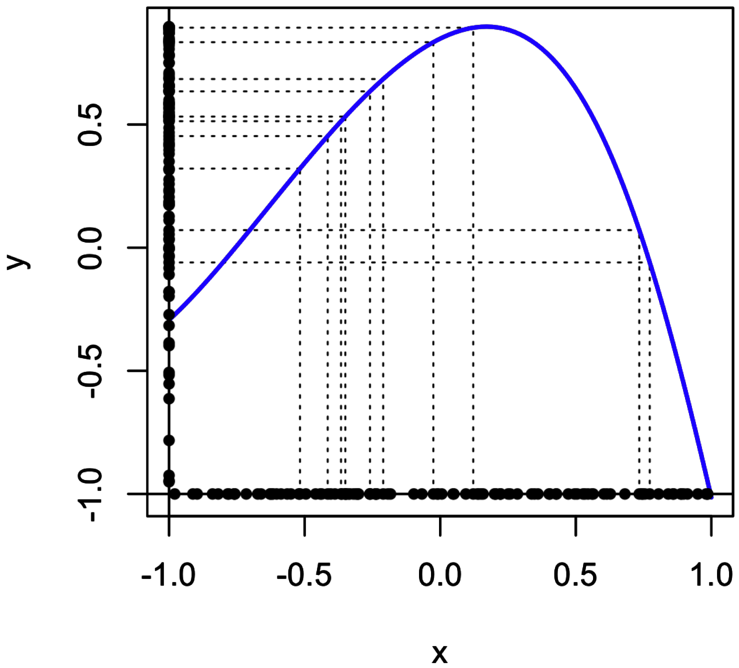
Simulation

Pourquoi simuler ?

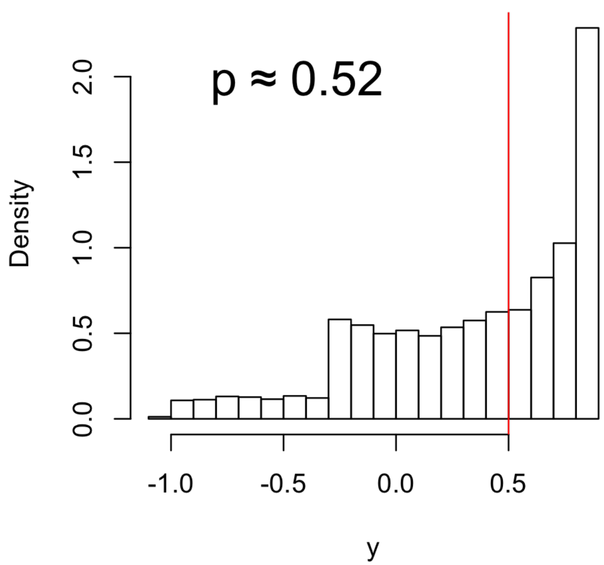
Un cas d'école

Soit U uniforme sur [-1,1]. Calculer :

- $P(U^2 < 0.5)$?
- Et ça : $P(2*\cos(U^2+1)*\text{atan}(\exp(U)) < 0.5)$?



Avec 10.000 simulations

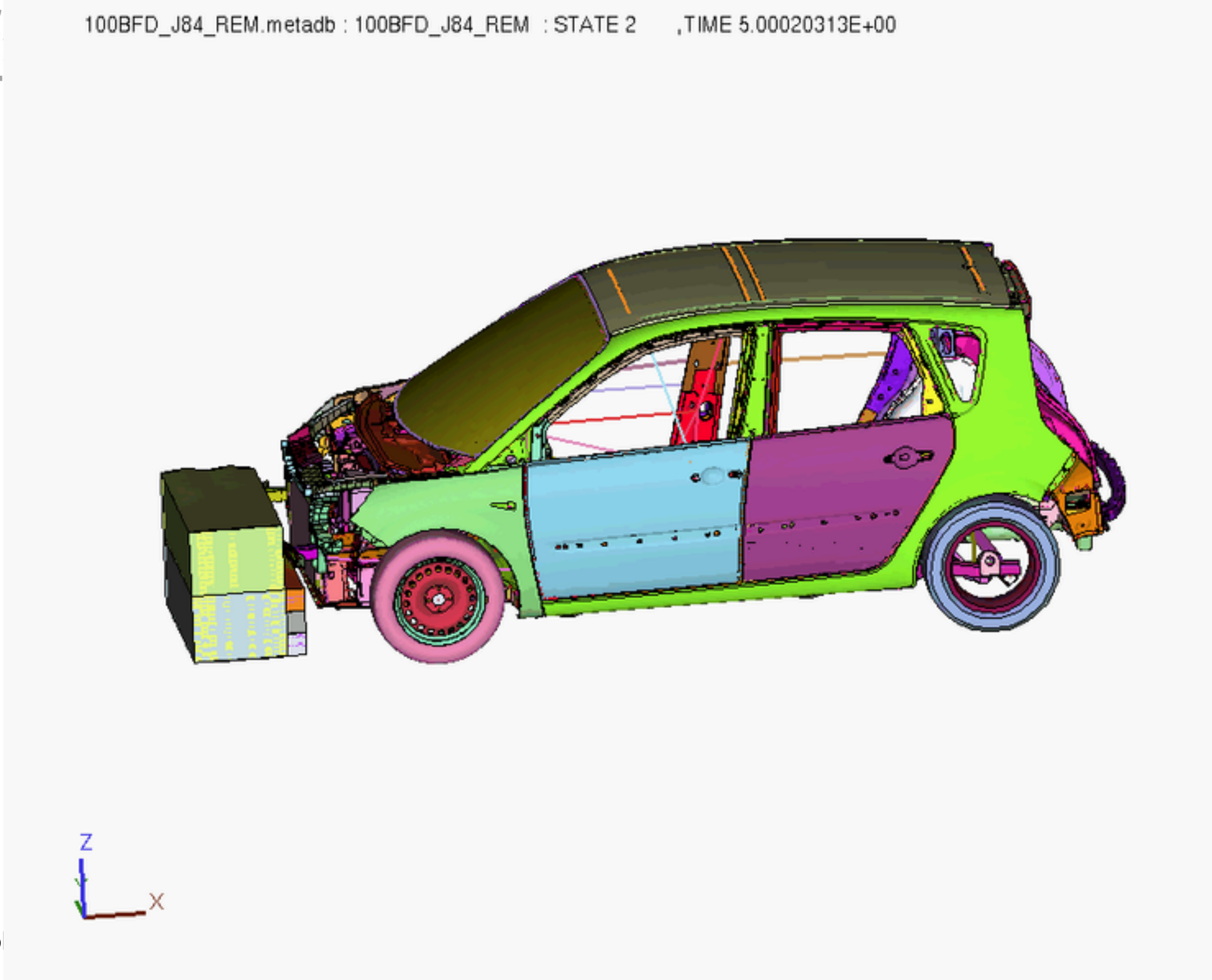


Pourquoi simuler ?

Un cas réel…

Conception d’un véhicule : Probabilité que lors d’un crash test frontal, le recul des pédales dépasse 15 cm ?

Thank’s to Renault


100BFD_J84_REM.metadb : 100BFD_J84_REM : STATE 2 ,TIME 5.00020313E+00
Z
X

Pro

Comment simuler ?

- Faisons l'hypothèse qu'un ordinateur peut simuler un nombre uniformément* entre 0 et 1. Comment faire pour simuler un nombre issu d'une loi de probabilité fixée ?

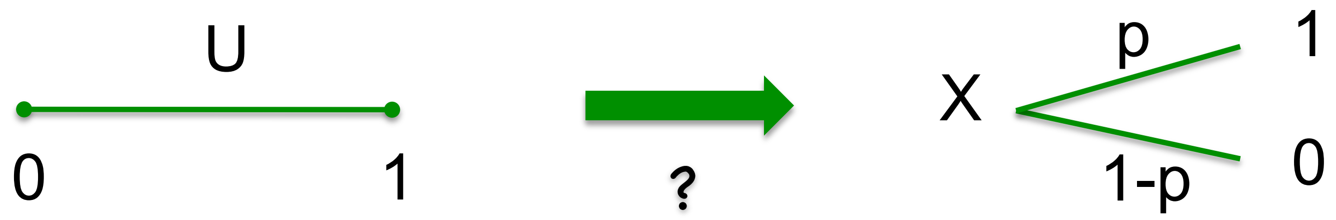
- *En termes mathématiques* :
  - On dispose d'une v.a. U de loi uniforme sur $\Omega=[0,1]$.
  - Soit une loi μ définie par sa fonction de répartition F. Peut-on construire à partir de U une variable aléatoire X tel que $F_X = F$? (F_X : fonction de répartition de X)

* *On parle de générateur pseudo-aléatoires, qui se basent par ex. sur des relations de congruences.*

Premiers exemples en discret

- Loi de Bernoulli B(p) [pile ou face]

  Résoudre le problème précédent pour la loi B(p) sur {0,1}



- Généralisation et interprétation
  - Généraliser à une loi discrète de support fini $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
  - Interpréter le résultat graphiquement au moyen de F

    Indication : sur quel axe représenter $U(\omega)$?

Loi binomiale

- **Procédé général pour une loi discrète :**
  - Simulation d'une loi discrète

  Nécessite de connaître toutes les sommes :

$$F_X(q) = \sum_{k=0}^{q} \mathbf{C}_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}, \text{ pour } q \in \{0,1,\ldots,n\}$$

  coûteux si n est grand

- **Procédé ad hoc**
  - Simuler $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes, uniformes sur [0,1]
  - Poser $X_i = 1$ si $U_i \leq p$ et 0 sinon
  - Poser enfin $X = X_1 + \ldots + X_n$

Simulation d'une loi continue

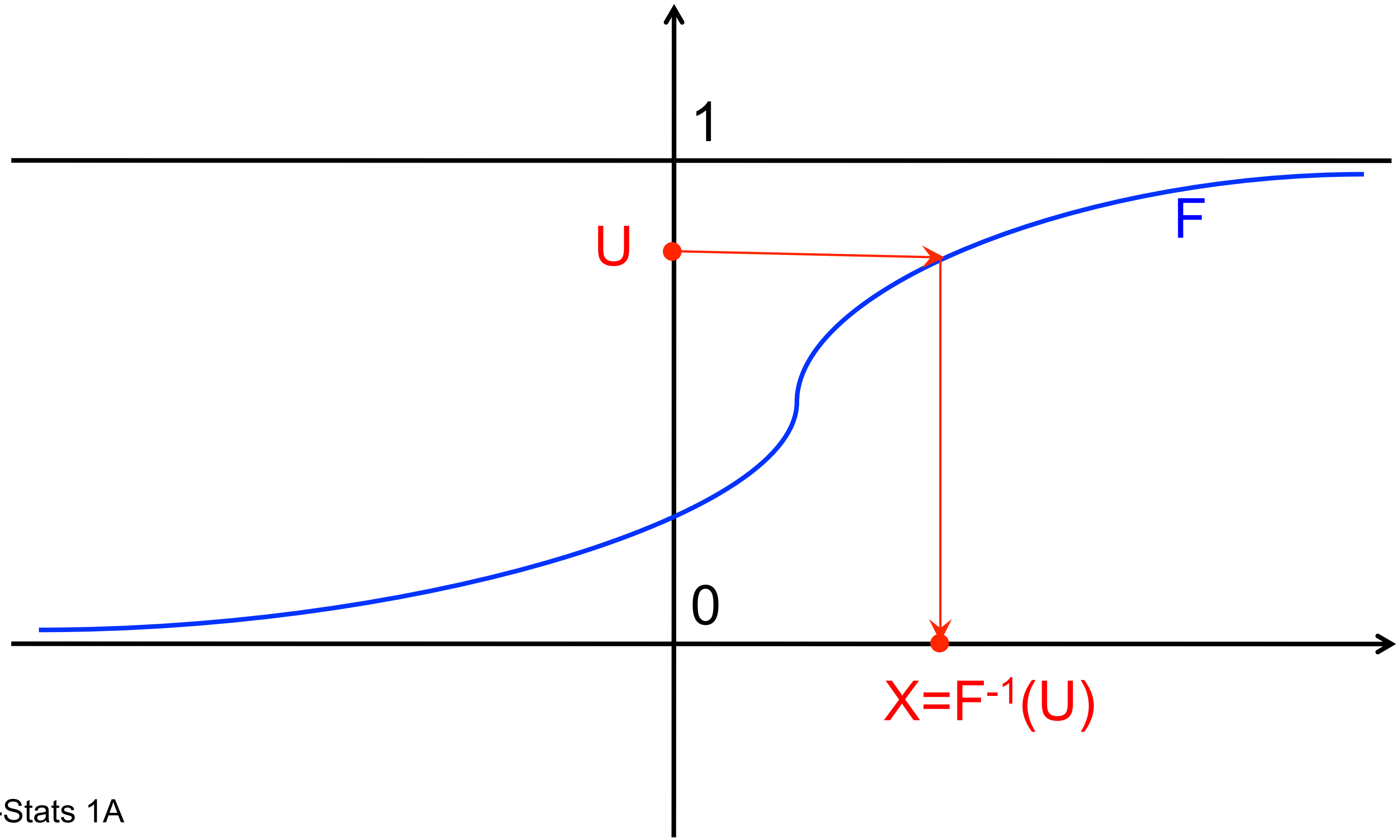
- Procédé général, analogue au procédé discret :
  - On veut simuler X de f.r. F
  - On suppose F continue et strictement croissante
  - Soit U une v.a. uniforme sur [0,1]
  - On pose $X = F^{-1}(U)$

  Preuve :

  $P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$
- Exemple de la loi exponentielle $E(\lambda)$
  - On pose :

$$X = \frac{-1}{\lambda}\log(1-U)$$

Simulation d'une loi continue



Loi exponentielle