
Probabilités et Statistiques

Année 2010/2011

laurent.carraro@telecom-st-etienne.fr

olivier.roustant@emse.fr

Cours n°6

Espérance, indépendance

Plan

- De la moyenne à l'espérance
- Espérance : cas discret, cas continu
- Formule de transfert
- Indépendance
- Espérance et indépendance

De la moyenne à l'espérance

➤ Jeu de pile ou face :

- $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ et $P(\{\text{pile}\})=p$, $P(\{\text{face}\})=q (=1-p)$
- Gain $G = 1$ si pile, $G = -1$ si face
- Loi de G ?

➤ Répétition de l'expérience :

- n lancers de la pièce
- Gains G_1, \dots, G_n
- Gain moyen : $\bar{G} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_i = \frac{n_i}{n} \times (+1) + \frac{(n - n_i)}{n} \times (-1)$
- $n_i = \text{card} \{i, G_i = 1\}$

$$\bar{G} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p \times (+1) + (1 - p) \times (-1) = E(G)$$

Espérance pour une loi discrète

➤ Soit X prenant les valeurs $\{a_1, \dots, a_m\}$

$$P(X=a_j) = p_j : \sum_{j=1}^m p_j = 1$$

➤ Définition : $E(X) = \sum_{j=1}^m a_j P(X = a_j)$

➤ Remarque : $\mu_X = \sum_{j=1}^m p_j \delta_{a_j}$

donc, au sens des distributions :

$$E(X) = \langle \mu_X, id \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu_X(dx)$$

Définition générale

- Définition : soit X une v.a. de loi μ_X

$$E(X) = \langle \mu_X, id \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu_X(dx)$$

- Cas d'une v.a. de densité f_X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

- Exercice : calculer l'espérance d'une v.a. de loi uniforme sur $[a,b]$

Propriétés fondamentales

➤ L'espérance est positive et linéaire :

$$X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(\lambda X) = \lambda E(X)$$

Exercice

On interroge successivement 5 personnes au hasard dans un groupe de 20 étudiants de TSE.

On suppose que parmi les 20, 16 aiment le cours de probas-stats 😊

Pour $1 \leq i \leq 5$, on pose $X_i = 1$ si la personne n°i aime le cours et 0 sinon.

1° - Quelle est la loi de X_i ? Son espérance ?

2° - Si X donne le nombre de personnes parmi les 5 qui aiment le cours de probas-stats, combien vaut $E(X)$?

Formule de transfert

➤ Soit X de densité f_X . Combien vaut $E(X^3)$??

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \mu_{X^3}(dy) \quad ???$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \mu_{X^3}(dy^3) \quad ???$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \mu_X(dx) \quad ???$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \mu_{X^3}(dx) \quad ???$$

➤ Formule de transfert

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \mu_X(dx)$$

Indépendance

➤ **Rappel : indépendance d'événements :**

- A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

➤ **Indépendance de v.a.**

- Soient X et Y deux v.a.
- On dit que X et Y sont indépendantes si

$$\forall A, B \quad P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Espérance et indépendance

- Soit X et Y deux v.a. indépendantes

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)] \times E[h(Y)]$$

- Cas particulier :

- Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$(*) \quad E[XY] = E[X] \times E[Y]$$

- Lorsque (*) est satisfaite, on dit que X et Y **sont non corrélées**.
- Donc indépendantes **implique** non corrélées
(réciproque fausse)