# Probabilités et Statistiques

Année 2010/2011

laurent.carraro@telecom-st-etienne.fr

olivier.roustant@emse.fr

# Cours n°7

Vecteurs aléatoires

Loi d'une somme (1ère partie)

# Plan

- Vecteurs aléatoires et loi
- Indépendance
  - Une application (voir TD n°8)
- Espérance
- Loi d'une somme

# Vecteurs aléatoires et loi

- Si X et Y sont deux v.a., on dit que Z=(X,Y) est un vecteur aléatoire (vect.a.).
- La loi du vect.a. (X,Y) est la probabilité $\mu_{(X,Y)}$ définie sur $IR^2$ par :

$$\forall A \in B(IR^2), \mu_{(X,Y)}(A) = P\big((X,Y) \in A\big)$$

- Formule de transfert générale :

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, \mu_{(X,Y)}(dx,dy)$$

# Cas discret

Exemple :

- X de valeurs 3 ou 5
- Y de valeurs 1,2 ou 3

➢ Loi de (X,Y)

| probabilité | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 3 | 0,2 | 0,15 | 0,3 |
| 5 | 0,15 | 0,05 | 0,15 |

➢ Loi marginale de X :

P(X=3)=P(X=3,Y=1)+P(X=3,Y=2)+P(X=3,Y=3)=0,2+0,15+0,3=0,65

On somme par ligne (idem pour Y)

➢ Indépendance :

La loi du couple est le produit des marges

# Cas continu

- Densité d'un couple :

$$P\big((X,Y)\in A\big) = \iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$

  - Formellement :

$$f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = P\big(X\in[x,x+dx],Y\in[y,y+dy]\big)$$

- Lois marginales :

$$f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$

- Indépendance :
  - cas continu : $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\; f_Y(y)$
  - cas général : $\mu_{(X,Y)}(dx,dy) = \mu_X(dx)\;\mu_Y(dy)$

# Une application (voir TD n°8)

Calcul de la longueur de l'interface austénite-ferrite à partir de l'image :

# Espérance d'un vect.a.

- Soit $X=(X_1,\dots,X_n)$ est un vect.a. $n \times 1$
- son espérance notée $E(X)$ est le vecteur $n \times 1$ $E(X)=(E(X_1),\dots,E(X_n))$
- Propriété fondamentale : l'espérance est linéaire (même si les coord. de X sont dépendantes)

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall A \text{ matrice } p \times n, \forall b \text{ vecteur } p \times 1, \\ E\left[AX+b\right] = AE\left[X\right]+b\end{array}}$$

Remarque : résultat identique en composant à droite par une matrice.

# Somme de v.a. – cas discret

- Soient X et Y deux v.a. supposées indépendantes et discrètes.
- On pose S=X+Y. Loi de S ?

$$P(X+Y=s)=\sum_x P(X=x)P(Y=s-x)$$

-> convolution discrète

- Illustration :

  Calculer la loi de la somme des résultats obtenus en lançant 2 dés à 6 faces.

# Somme de v.a. – convolution

- Soient X et Y deux v.a. supposées indépendantes et continues.
- On pose S=X+Y. Alors S admet la densité :

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s-y)\, f_Y(y)\, dy = (f_X * f_Y)(s)$$

- Illustration :

  Quelle est la loi de la somme de 2 v.a. indépendantes et de loi uniforme sur [-1/2, 1/2] ?