Fiche de TD n° 9

Evaluation de π par la méthode de Monte Carlo

Ce TD prépare le TP n°10 qui sera évalué.
On rappelle au préalable que l'aire du disque unité est égale à π ! !

1° - La méthode du rejet

Expliquer comment calculer la surface du disque unité $D = D(0, 1)$ en tirant au hasard un point dans le carré circonscrit. Plus précisément exprimer l'aire du disque comme l'espérance d'une v.a. X qui est fonction de deux variables aléatoires (v.a.) U et V indépendantes et de loi uniforme sur [-1,1]. Expliquer comment estimer $E(X)$ à partir de n réalisations indépendantes $X_1, ..., X_n$ de X. Donner l'espérance et la variance de cet estimateur.
Que se passe-t-il si on tire au hasard U et V dans le carré $[-2, 2]^2$ au lieu du carré $[-1, 1]^2$?

2° - Seconde méthode

On propose maintenant d'utiliser une autre méthode. En se ramenant au quart de disque situé dans le quart de plan $\{x \geq 0, y \geq 0\}$, expliquer pourquoi on a : aire$(D) = 4 \int_0^1 g(x)dx$, où $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$
Donner l'expression de cette intégrale comme l'espérance d'une v.a. Y fonction d'une v.a. U de loi uniforme sur [0,1]. Construire alors comme dans la question précédente un estimateur de π à partir des réalisations $Y_1, ..., Y_n$ de Y.
Evaluer l'espérance et la variance de cet estimateur. La comparer à celle du précédent.

3° - Accélération de la seconde méthode

On propose ensuite d'accélérer la convergence de la méthode précédente ? on parle de « réduction de variance ». Justifier graphiquement que :
$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 g(1 - x)dx$
En déduire que l'on a : aire$(D) = 2 \int_0^1 (g(x) + g(1 - x))\, dx$
Donner l'expression de cette intégrale comme l'espérance d'une v.a. Z fonction d'une v.a. U de loi uniforme sur [0,1]. Toujours à l'aide d'un dessin, expliquer pourquoi le calcul de cette intégrale par Monte Carlo devrait être bien plus précis que le calcul de la seconde méthode.