telecom
Saint-Etienne

Probabilités et Statistiques

Année 2009/2010

laurent.carraro@telecom-st-etienne.fr

olivier.roustant@emse.fr

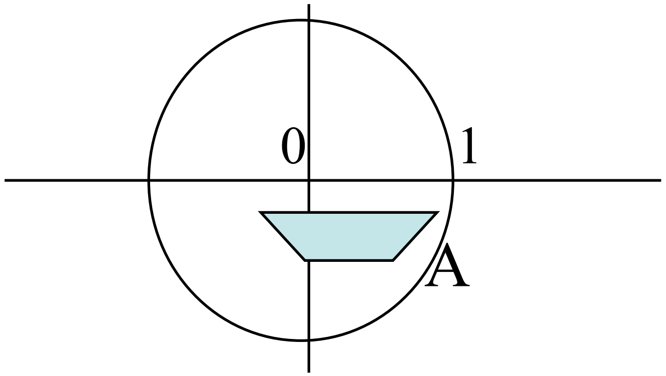
Cours °2

Définition d'une probabilité

Modèle probabiliste

La vision mesure (d'aire)

- Considérons une erreur de mesure ε sur Ω=D(0,1) de R^2
- On donne $A \subset \Omega$. Comment calculer la probabilité que ε soit dans A ?



- Morale du paradoxe de Bertrand: préciser les hypothèses !

- *Question : par analogie, si nous devions calculer la masse de A, de quoi aurions-nous besoin ?*

La densité

- *Réponse :* de *la densité de masse du disque*
- Par exemple, $f(x,y) = \exp(-r^2)$, avec $r^2=x^2+y^2$, pour $0 \leq r \leq 1$
- *Questions :*
  - *Comment s'interprète cette densité ?*
  - *Comment l'utilise-t-on pour calculer la masse ?*

La probabilité

- Raisonnons maintenant en probabilité
- *Hypothèse : on se donne la densité de probabilité*
- $f(x,y)$ proportionnel à $\exp(-r^2)$, avec $r^2=x^2+y^2$, pour $0 \leq r \leq 1$

- *Questions :*
  - *Comment trouver la constante de proportionnalité ?*
  - *Comment s'écrit la probabilité cherchée ?*
  - *Avec la vision mesure, quelles sont les propriétés minimales que l'on est en droit d'exiger d'une probabilité ?*

Définition provisoire d'une probabilité

- Définition (incomplète) d'une mesure

  On se donne un ensemble Ω, support des valeurs possibles.

  Une mesure μ est une application sur $\wp(\Omega)$ vérifiant :

  - $\mu(\emptyset)=0$
  - $\mu(\Omega)<+\infty$
  - *Pour toute séquence d'éléments de $\wp(\Omega)$, $A_1, \ldots, A_n$, alors si les A_k sont deux à deux disjoints,*

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1)+\ldots+ \mu(A_n) \qquad \textit{(additivité)}$$

- *Question : Que faut-il rajouter pour obtenir une probabilité ?*

Modèle probabiliste

- *Modèle probabiliste*
  - *La définition d'une probabilité dépend donc de Ω.*
  - *Lorsque μ est une probabilité sur $\wp(\Omega)$,*
    le triplet $(\Omega, \wp(\Omega), \mu)$ définit un modèle probabiliste

- *Exemple. Ecrire un modèle probabiliste du jeu de pile ou face :*
  - *Pour 1 lancer*
  - *Pour 2 lancers*
  - *Généraliser à n lancers*

Déjà des problèmes …

- *Avec 2 dés : probabilité que la somme des chiffres fasse 10 ?*

- 1er calcul. Cas de dés différents (par ex. 1 dé bleu, 1 dé rouge)
  - $\Omega = \{(i,j),\ 1 \leq i,j \leq 6\}$ $\quad$ $A = \{ (4,6) \cup (5,5) \cup (6,4) \}$
  - $P(A) = P(\{ (4,6) \}) + P(\{ (5,5) \}) + P(\{ (6,4) \}) = 3 \text{x} 1/36 =$ **<u>1/12</u>**

- 2ème calcul. Cas de dés indistinguables
  - $\Omega = \{ \{i,j\},\ 1 \leq i \leq j \leq 6\}$ $\quad$ $A = \{ \{4,6\} \cup \{5,5\} \}$
  - $P(A) = P(\{ \{4,6\} \}) + P(\{ \{5,5\} \}) = 1/36 + 1/36 =$ **<u>1/18</u>**

Qu'en pensez-vous ?

Déjà des problèmes ?

- *Solution : ne pas faire les choses à moitié !*

- 1er calcul. Cas de dés différents (par ex. 1 dé bleu, 1 dé rouge)
  - $\Omega = \{(i,j),\ 1 \le i,j \le 6\}$ $\quad$ $A = \{ (4,6)\cup(5,5)\cup(6,4) \}$
  - $P(\{ (i,j) \}) = 1/36$ (dés non pipés)
  - $P(A) = P(\{ (4,6) \}) + P(\{ (5,5) \}) + P(\{ (6,4) \}) = 3*1/36 =$ **1/12**

- 2ème calcul. Cas de dés indistinguables
  - $\Omega = \{ \{i,j\},\ 1 \le i<j \le 6\} \cup \{ \{i\},\ 1\le i\le 6 \}$ $\quad$ $A = \{ \{4,6\}\cup\{5\} \}$
  - $P(\{ \{i,j\} \}) = 2/36$ si $i\neq j$, et $P(\{ \{i\} \})=1/36$

    Rqe : que vaut la somme des proba. avec 1/36 partout ?
  - $P(A) = P(\{ \{4,6\} \}) + P(\{ \{5\} \}) = 2/36 + 1/36 =$ **1/12**

Un vrai problème

- Un autre exemple (loi de Poisson)

  $\Omega = N$. On pose : $\forall k \in N$, $P(\{ k \}) = \lambda^k / k!$

- *Questions*
  - *Est-ce une probabilité sur $\wp(N)$? Quelle nouvelle propriété doit-on utiliser pour le vérifier ?*

    -> On parle de σ-additivité
  - *Le cas échéant, transformer P pour en faire une probabilité*
  - *Donner la définition générale d'une probabilité discrète, et écrire son expression à l'aide de la mesure de Dirac*

De pire en pire… le paradoxe du singleton ?

- Encore un autre exemple (loi uniforme sur [0,1])

  On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir uniformément un nombre entre 0 et 1

- *Questions*
  - *Quelle est la probabilité de [a,b], pour $0 \leq a < b \leq 1$?*
  - *La probabilité est-elle définie à partir d'une densité ?*
  - *Soit $A \subset \Omega$. Quelle est la probabilité de A ?*
  - *P(A) existe-t-il toujours ?*
  - *Quelle est la probabilité de {x}, pour $x \in \Omega = [0,1]$?*
  - *Sachant que $\Omega = \cup \{x\}$ pour $x \in \Omega$, que vaut $P(\Omega)$?*

Ne pas trop en ajouter… et bien choisir sa tribu !

- Ce que nous apprend l'exemple précédent

  On ne peut pas étendre la σ-addivité aux nombres réels

  On ne peut pas calculer la probabilité de toute partie de $\Omega \subset R$

- La notion de tribu (ou σ-algèbre)

  Une tribu est un sous-ensemble de $\wp(\Omega)$ contenant $\varnothing$, stable par passage au complémentaire et réunion dénombrable

- Exemples
  - $\wp(\Omega)$ est toujours une tribu, mais parfois trop grosse !
  - tribu borélienne B(R) : plus petite tribu contenant les intervalles de R -> c'est la tribu utilisée en pratique sur R

Définition d'une probabilité

- Définition d'une mesure

  On se donne un ensemble Ω, support des valeurs possibles, et une tribu $\Im$, sous-ensemble de « mesurables » de Ω.

  Une mesure μ est une application de $\Im$ dans R+ vérifiant :

  - $\mu(\emptyset)=0$
  - $\mu(\Omega)<+\infty$
  - *Pour toute suite dénombrable d'éléments de $\Im$, A_1, …, A_n, … alors si les A_n sont deux à deux disjoints,*

  $$\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-additivité})$$

- *Question : Que faut-il rajouter pour obtenir une probabilité ?*

Exercice 1

- *Probabilité et inclusion*

  Montrer que si $A \subseteq B$ alors $P(A) \leq P(B)$ et $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$

- *Généralisation*
  - *Probabilité d'une réunion d'ensembles emboîtés*

    Soient $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots \subseteq A$, tels que $A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = A$

    alors $P(A) = \lim P(A_n) \quad (n \to +\infty)$
  - *Probabilité d'une intersection d'ensemble emboîtés*

    Soient $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots \subseteq A$, tels que $A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = A$

    alors $P(A) = \lim P(A_n) \quad (n \to +\infty)$

Exercice 2

- *Probabilité (quelconque) et réunion (quelconque)*
  Montrer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- *Généralisation - formule de Poincaré*
  - *Probabilité (quelconque) d'une réunion (quelc.) de 3*
    - *Exprimer $P(A \cup B \cup C)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ et $P(A \cap B \cap C)$*
  - *Généraliser à la réunion de k ensembles*

- *Application : quelle est la probabilité pour qu'au moins une personne récupère son propre manteau si tout le monde choisit au hasard son manteau sur le porte-manteaux ? (voir TD)*

Ω, grand Ω !

- *Exercice : donner un modèle probabiliste pour calculer la probabilité que la durée de vie d'un portable dépasse 3 ans.*

- *Solution : dur, dur… Théoriquement, il faudrait mettre dans Ω toutes les variables censés influer sur la durée de vie (variables de fabrication, d'utilisation, etc.) -> très grand ensemble !*

Comment faire ?

Réponse : cours n°3…