Probabilités et Statistiques

Année 2009/2010

laurent.carraro@telecom-st-etienne.fr

olivier.roustant@emse.fr

Cours n°6

Espérance, indépendance

Plan

- De la moyenne à l'espérance
- Espérance : cas discret, cas continu
- Formule de transfert
- Indépendance
- Espérance et indépendance

De la moyenne à l'espérance

- Jeu de pile ou face :
  - Ω = {pile,face} et P(({pile})=p, P({face})=q (=1−p)
  - Gain G = 1 si pile, G = -1 si face
  - Loi de G ?
- Répétition de l'expérience :
  - n lancers de la pièce
  - Gains $G_1, \ldots, G_n$
  - Gain moyen : $\overline{G} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G_i = \frac{n_i}{n} \times (+1) + \frac{(n-n_i)}{n} \times (-1)$
  - n_i = card {i, G_i = 1}

$$\overline{G} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} p \times (+1) + (1-p) \times (-1) = E(G)$$

Espérance pour une loi discrète

- Soit X prenant les valeurs $\{a_1,\ldots,a_m\}$
  $P(X=a_j) = p_j$: $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$

- Définition : $E(X) = \sum_{j=1}^{m} a_j \, P(X = a_j)$

- Remarque : $\mu_X = \sum_{j=1}^{m} p_j \, \delta_{a_j}$

  donc, au sens des distributions :

$$E(X) = \langle \mu_X \, , \, id \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mu_X(dx)$$

Définition générale

- Définition : soit X une v.a. de loi μ_X

$$E(X) = \langle \mu_X \ , id \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \ \mu_X(dx)$$

- Cas d'une v.a. de densité f_X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \ f_X(x) \ dx$$

- Exercice : calculer l'espérance d'une v.a. de loi uniforme sur [a,b]

Propriétés fondamentales

- L'espérance est positive et linéaire :

$$X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(\lambda X) = \lambda E(X)$$

Formule de transfert

- Soit X de densité f_X. Combien vaut $E(X^3)$??

$$E(X3) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, \mu_{X^3}(dy) \quad ??? \qquad E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, \mu_{X^3}(dy^3) \quad ???$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \, \mu_X(dx) \quad ??? \qquad E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \, \mu_X(dx^3) \quad ???$$

- Formule de transfert

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, \mu_X(dx)$$

Indépendance

- **Rappel : indépendance d'événements :**
  - A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

- **Indépendance de v.a.**
  - Soient X et Y deux v.a.
  - On dit que X et Y sont indépendantes si

$$\forall A, B \; P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

Espérance et indépendance

- Soit X et Y deux v.a. indépendantes

$$E\left[g(X)\,h(Y)\right] = E\left[g(X)\right] \times E\left[h(Y)\right]$$

- Cas particulier :
  - SI X et Y sont indépendantes, alors :

$$(*) \quad E\left[X\,Y\right] = E\left[X\right] \times E\left[Y\right]$$

  - Lorsque (*) est satisfaite, on dit que X et Y **sont non corrélées**.
  - Donc indépendantes **implique** non corrélées

    (réciproque fausse)