Probabilités et Statistiques

Année 2009/2010

laurent.carraro@telecom-st-etienne.fr

olivier.roustant@emse.fr

Cours n°8

Vecteurs aléatoires

Plan

- Vecteurs aléatoires et loi
- Indépendance
- Espérance
- Matrice de covariance

Vecteurs aléatoires et loi

- Si X et Y sont deux v.a., on dit que Z=(X,Y) est un vecteur aléatoire (vect.a.).
- La loi du vect.a. (X,Y) est la probabilité $\mu_{(X,Y)}$ définie sur IR^2 par :

$$\forall A \in B(IR^2),\ \mu_{(X,Y)}(A) = P\big((X,Y) \in A\big)$$

- Formule de transfert générale :

$$E\big[g(X,Y)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\ \mu_{(X,Y)}(dx,dy)$$

Cas discret

Exemple :

- X de valeurs 3 ou 5
- Y de valeurs 1,2 ou 3

➢ Loi de (X,Y)

probabilité	1	2	3
3	0,2	0,15	0,3
5	0,15	0,05	0,15

➢ Loi marginale de X :

P(X=3)=P(X=3,Y=1)+P(X=3,Y=1)+P(X=3,Y=1)=0,2+0,15+0,3=0,65

On somme par ligne (idem pour Y)

➢ Indépendance :

La loi du couple est le produit des marges

Cas continu

- **Densité d'un couple :**

$$P\big((X,Y)\in A\big) = \iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$

  - Formellement :

$$f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = P\big(X\in[x,x+dx],Y\in[y,y+dy]\big)$$

- **Lois marginales :**

$$f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$

- **Indépendance :**
  - cas continu : $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$
  - cas général : $\mu_{(X,Y)}(dx,dy) = \mu_X(dx)\,\mu_Y(dy)$

Somme de v.a. - convolution

- Soient X et Y deux v.a. supposées indépendantes et continues.
- On pose S=X+Y. Loi de S ?

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s-y)\, f_Y(y)\, dy = (f_X * f_Y)(s)$$

- Illustration :

  Une quantité aléatoire X est mesurée avec une erreur ER elle aussi supposée aléatoire.

  - Quelle est la loi de la quantité mesurée ?
  - Quelle hypothèse feriez-vous a priori pour la loi de ER ?

Retour sur la covariance

- Par la formule de transfert :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\Big(\big[X - E(X)\big]\big[Y - E(Y)\big]\Big) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big[x - E(X)\big]\big[y - E(Y)\big]\,\mu_{(X,Y)}(dx,dy)$$

- Si X et Y sont indépendantes :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big[x - E(X)\big]\big[y - E(Y)\big]\,\mu_X(dx)\,\mu_Y(dy)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\big[x - E(X)\big]\,\mu_X(dx)\int_{-\infty}^{+\infty}\big[y - E(Y)\big]\;\mu_Y(dy) = 0$$

Espérance d'un vect.a.

- Soit $X=(X_1,\dots,X_n)$ est un vect.a. $n\times 1$
- son espérance notée $E(X)$ est le vecteur $n\times 1$
  $E(X)=(E(X_1),\dots,E(X_n))$
- Propriété fondamentale : l'espérance est linéaire

$$\forall A \text{ matrice } p\times n, \forall b \text{ vecteur } p\times 1,$$

$$E\left[AX+b\right]=AE\left[X\right]+b$$

Remarque : résultat identique en composant à droite par une matrice.

Matrice de covariance

- Soit $X=(X_1,\ldots,X_n)$ est un vect.a. $n \times 1$ d'espérance notée m.
- La matrice de covariance de X est la matrice $n \times n$, notée Σ ou Σ_X, de terme général :

$$\Sigma_{i,j} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

- Matriciellement, en notant m_X l'espérance de X :

$$\Sigma_X = E\left[{}^t(X - m_X)(X - m_X)\right]$$

Propriétés

- La matrice Σ_X est symétrique, positive :

$$\forall b \text{ vecteur } n \times 1,\ {}^t b\, \Sigma_X\, b \geq 0$$

- Autres propriétés :

$$\forall A \text{ matrice } p \times n, \Sigma_{AX} = {}^t A\, \Sigma_X\, A$$

$$\forall b \text{ vecteur } n \times 1, \Sigma_{X+b} = \Sigma_X$$

- Si les composantes de X sont indépendantes, la matrice Σ_X est diagonale.