

Fiche de TD n° 11

Méthode de Monte Carlo et réduction de variance

1° - Le problème

Lors de la conception d'un système, on est amené à examiner la dépendance en le paramètre a de la quantité :

$$C_U(a) = E\left(\frac{1}{M}\right), \text{ où } M_U = \frac{1}{23} \sum_{i=1}^{23} U_i \quad (1)$$

Dans ce qui précède, les v.a. U_i sont supposées indépendantes et de loi uniforme sur $[1-a, 2+a]$ (avec $0 < a < 1$).

1. Combien vaut $E(M_U)$?
2. Expliciter $C_U(a)$ à l'aide de la formule de transfert.
3. A-t-on $E(1/M_U) = 1/E(M_U)$? Quand cette formule peut-elle être valable ?

2° - La méthode de Monte Carlo

1. Expliquer comment estimer la quantité $C_U(a)$ par une méthode de Monte Carlo.
2. Si U est de loi uniforme sur $[1-a, 2+a]$, quelle est la loi de $V=3-U$?
3. Quelle est l'espérance de la v.a. $1/M_V$? et celle de $\frac{1/M_U+1/M_V}{2}$?
4. Quelle est la covariance, puis la corrélation, entre les v.a. M_U et M_V ?
5. Comment estimer $C_U(a)$ par une méthode de Monte Carlo, de façon plus rapide qu'en 1 ?