Fiche de TD n° 7

Loi exponentielle - loi normale

1° - La loi exponentielle

Vous vous intéressez au temps nécessaire, noté T, pour observer l'apparition d'un phénomène. Les exemples typiques sont : le temps jusqu'à la désintégration d'un atome radioactif, le temps d'attente à un standard téléphonique, le temps d'accès à un serveur, la durée de vie d'un individu...

1. On suppose que : $\forall s, t \geq 0, P(T \geq s + t / T \geq s)$ est indépendant de s. Après avoir commenté et discuté soigneusement de la pertinence de cette hypothèse dans chacun des cas précédents, montrer qu'alors $\exists\, \theta$ tel que $P(T \geq t) = \theta^t$ pour $t > 0$.
2. Montrer ensuite qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$ pour $t > 0$. On dit qu'alors T suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
3. Donner alors la densité de T, son espérance, ainsi que sa médiane. Expliquez pourquoi dans le contexte d'une substance radioactive la médiane est appelée demi-vie.

2° - Loi normale On rappelle qu'une variable aléatoire X est de loi normale $\mathcal{N}$(m, σ) si sa densité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right]$$

1. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}$(0,1). Quelle est la loi de $m + \sigma X$?
2. Déterminer l'espérance et la variance d'une v.a. de loi $\mathcal{N}$(0,1).
3. Combien vaut l'espérance et la variance d'une v.a. de loi $\mathcal{N}$(m, σ) ?
4. Comment passer d'une v.a. de loi $\mathcal{N}$(m, σ) à une v.a. de loi $\mathcal{N}$(0,1) ? Pourquoi appelle-t-on la loi $\mathcal{N}$(0,1) loi normale centrée réduite ?