Introduction à la régression
cours n°1

ENSM.SE – axe MSA

L. Carraro

Présentation

- **Objectifs**
  - Comprendre la problématique générale de la régression.
  - Savoir **mettre en œuvre** la régression linéaire dans des cas simples, mais réalistes.
  - Ouvrir sur d'autres types de régression (e.g. logistique)
- **Evaluation**
  - TP le 20 novembre : 30%
  - TP le 30 novembre : 20%
  - TP le 7 décembre : 10%
  - Examen avec documents : 40%

Calendrier

- **Mardi 7 novembre** (8h15-11h30)

  Introduction, retour sur conditionnement, rappels 1A sur un exemple.
- **Mercredi 8 novembre** (8h15-11h30)

  ANOVA, interaction et corrélation, résidus et validation.
- **Lundi 20 novembre** (13h30-16h45)

  TP tailles (objectif = savoir-faire de A à Z).
- **Jeudi 23 novembre** (8h15-9h45)

  Retour sur TP tailles, prévisions, valeurs aberrantes, valeurs influentes.

Calendrier

- **Jeudi 30 novembre** (8h15-11h30)

  TP commun régression/plans d'expériences.
- **Mardi 5 décembre** (8h15-11h30)

  De l'analyse discriminante à la régression logistique.
- **Jeudi 7 décembre** (10h-11h30)

  TP régression logistique.
- **Lundi 18 décembre** (8h15-9h45)

  Examen.

Logistique

- Polycopié sur la régression linéaire
- Photocopies des transparents
- Intervenants :
  - L. Carraro (toutes séances sauf cours régression logistique)
  - A. Badea (régression logistique)
  - C. Helbert (TP commun régression/plans d'expériences)

Rappel problématique régression

Lien entre une **réponse** y
et des **prédicteurs** $x_1,\ldots, x_p$

… dans un contexte incertain

… à partir d'expériences

… dans un but **prédictif**

Classification

- réponse quantitative/qualitative
- régression paramétrique/non paramétrique
- régression linéaire/non linéaire
- prédicteurs contrôlés/non contrôlés

Aspects formels

- L'espérance conditionnelle comme espérance
- L'espérance conditionnelle comme projection
- L'espérance conditionnelle linéaire
- Cas gaussien
- Prédicteurs qualitatifs

Rappel 1A

- Le modèle linéaire et ses hypothèses :
  - indépendance
  - homoscédasticité
  - normalité
- Estimation des paramètres
  - Equation normale (moindres carrés)
  - Propriétés statistiques
- Tests sur les paramètres

Le modèle linéaire

- Y vecteur des réponses
- X matrice du plan d'expériences
- β vecteur des paramètres
- ε vecteur des écarts au modèle :

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont des réalisations de v.a.

$E_1, \ldots, E_n$ indépendantes et de loi $N(0,\sigma^2)$

Estimation et propriétés de $\hat{\beta}$

- Equation normale : $X'X\ \hat{\beta} = X'Y$
- $\hat{\beta}$ est de loi normale.
- $E(\hat{\beta}) = \beta$
- $Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'\ X)^{-1}$
- $\hat{\beta}$ est BLUE
- A un facteur près, $cov(\hat{\beta})$ ne dépend que du plan d'expériences, pas des résultats.

Tests sur les paramètres

- Hypothèse nulle $H_0 : \beta_i = 0$
- Statistique de test :

$$T = \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}(\hat{\beta}_i)}$$

- T, appelée t-ratio, est de loi de Student t_{n-p-1}
- Décision à partir de la p-valeur

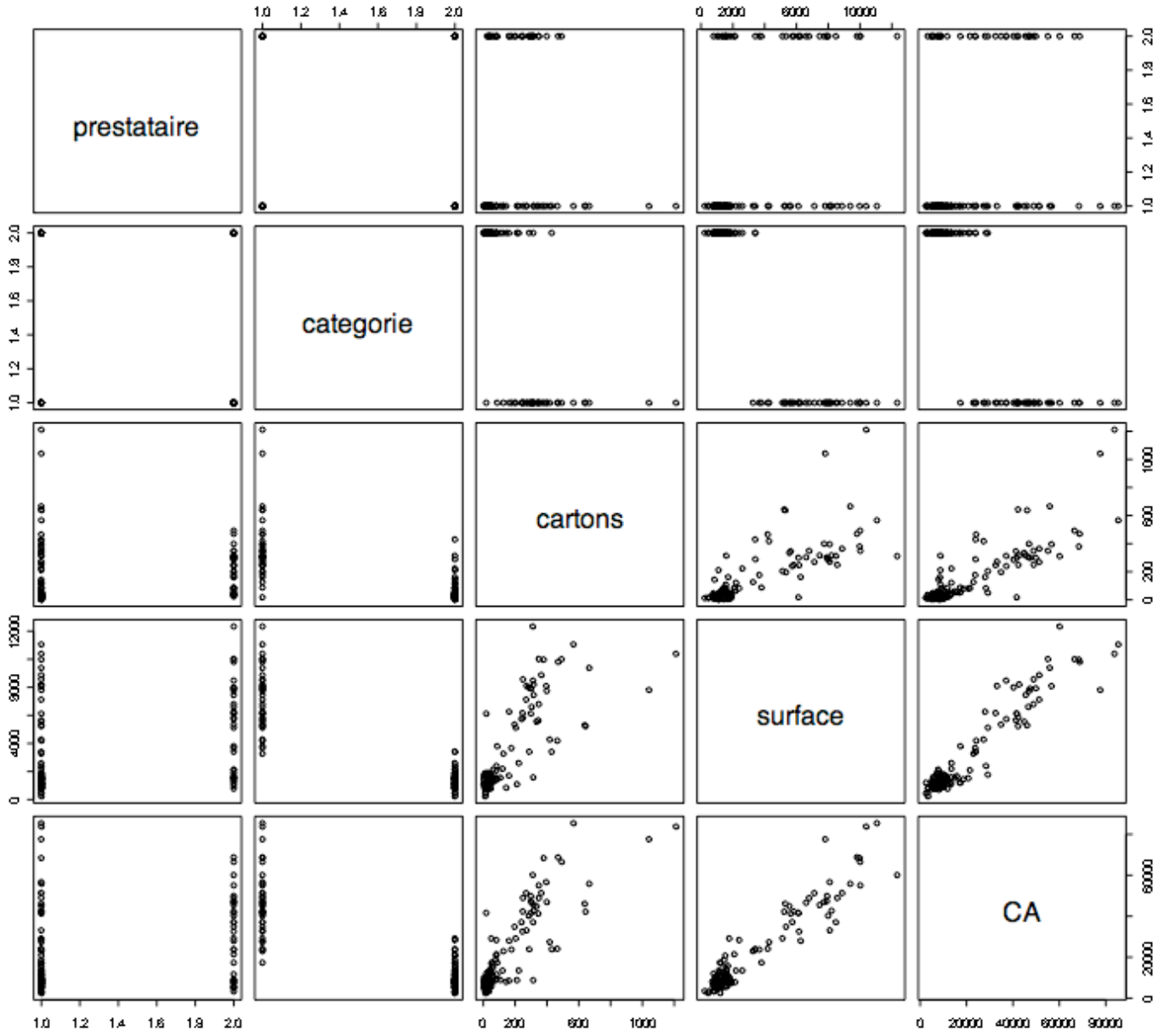
Exemple 1
Récupération de cartons dans la grande distribution

- Réponse : tonnage de cartons annuel
- Prédicteurs :
  - CA HT
  - surface commerciale
  - prestataire (A ou B)
  - catégorie (super ou hyper)
- 137 observations

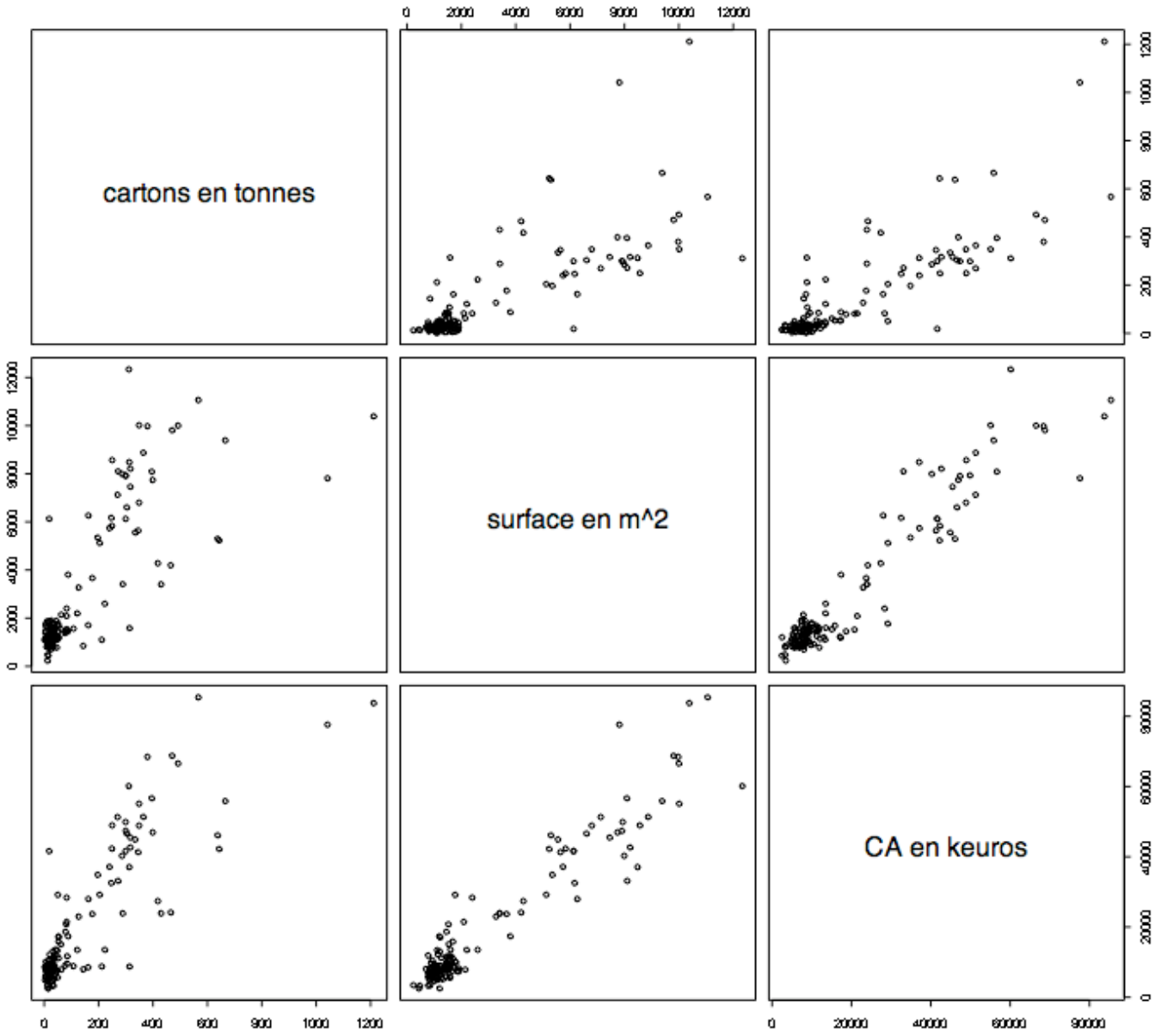
Questions du client

- Peut-on prévoir le tonnage cartons produit ?
  - Si oui, avec quelle précision ?
- Les deux prestataires ont-ils des résultats analogues ?
  - L'info tonnage vient des prestataires.
  - Approche « toutes choses égales par ailleurs ».

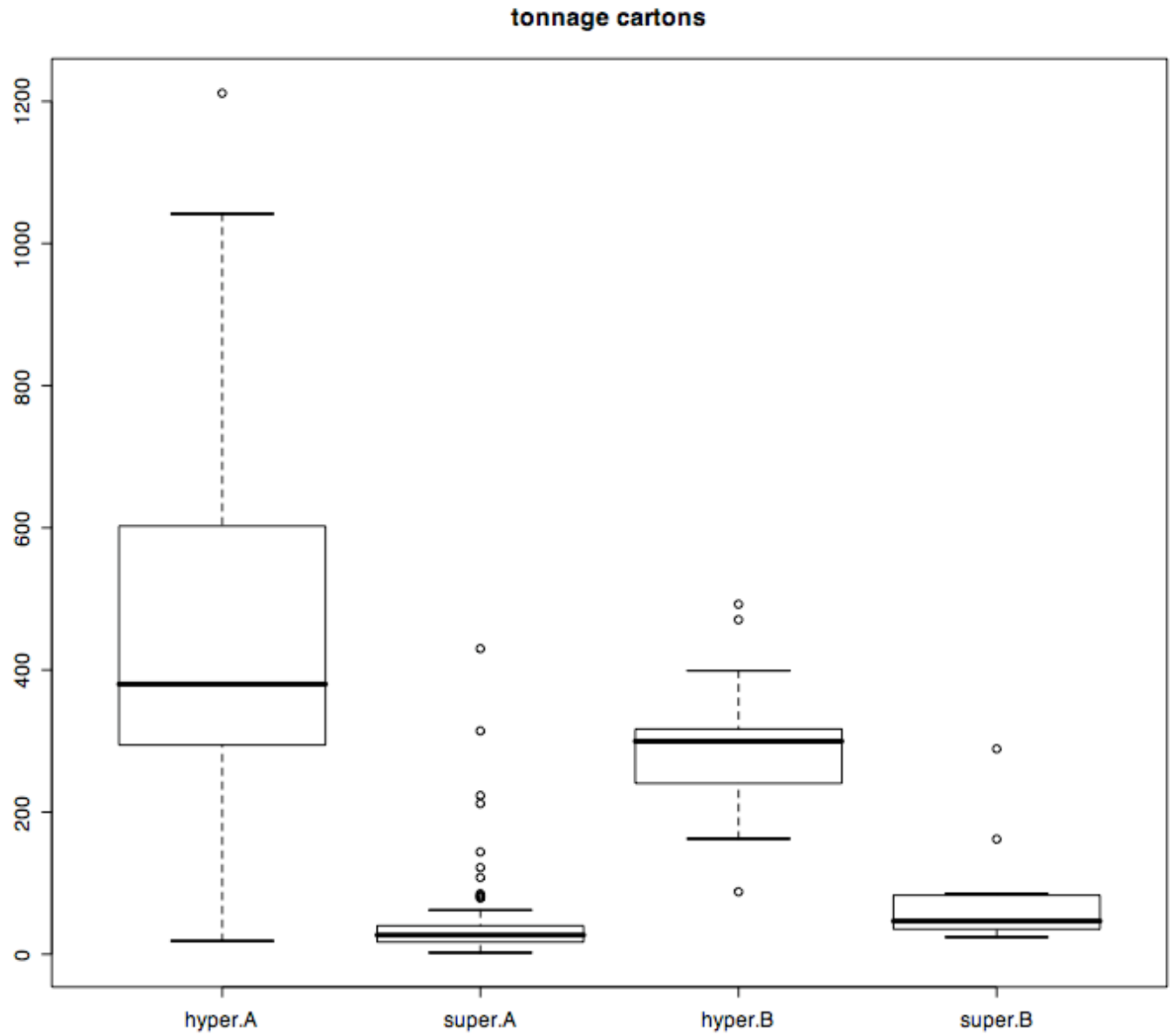
plot(dechets)



pairs(cartons~surface+CA, data=dechets)



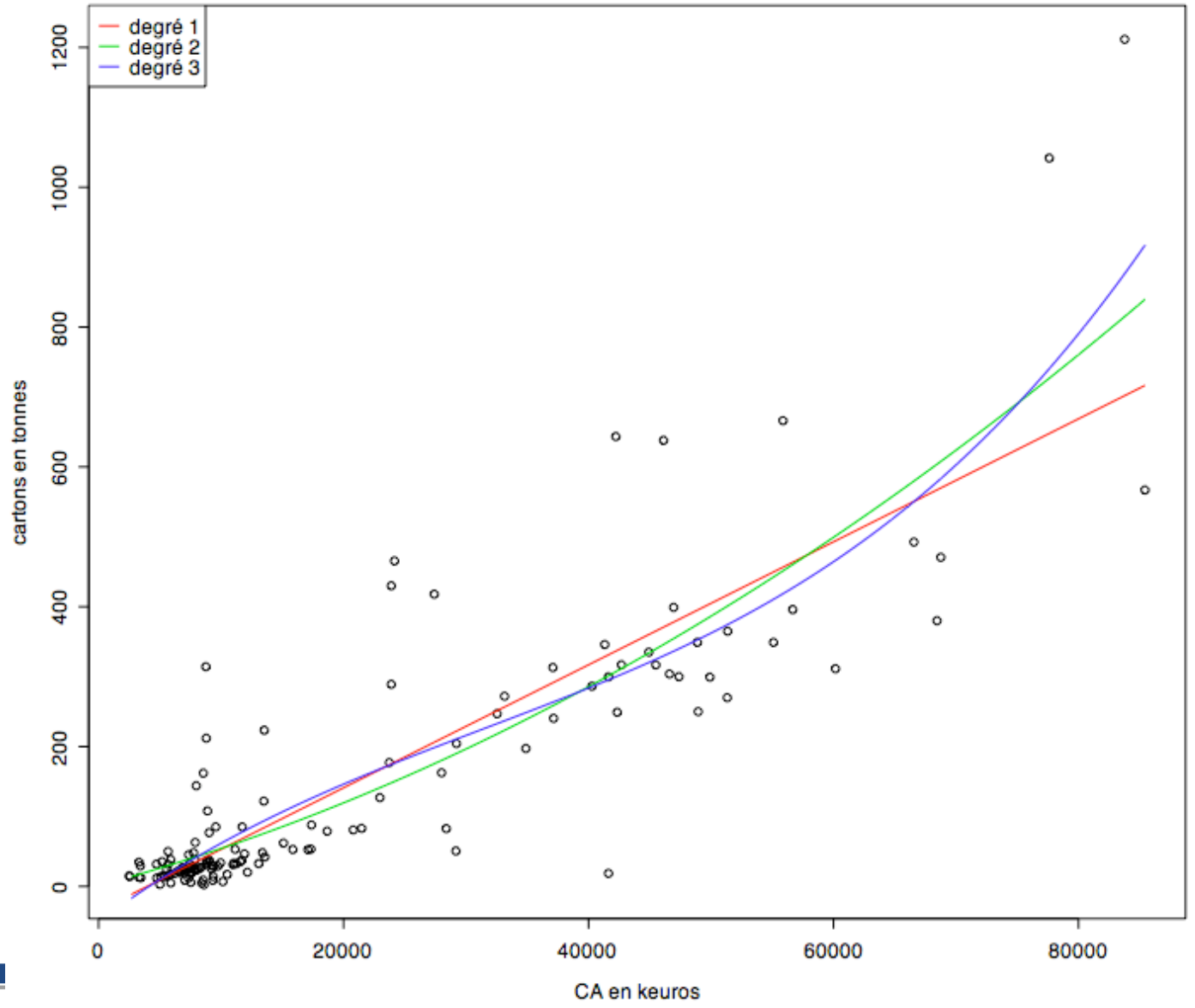
boxplot(cartons~categorie+prestataire, data=dechets)



Premières observations

- CA et Surface semblent influentes
- Catégorie et Prestataire aussi
- Questions :
  - Faut-il considérer toutes les variables (on observe une corrélation entre CA et Surface) ?
  - Modélisation de quel type ?

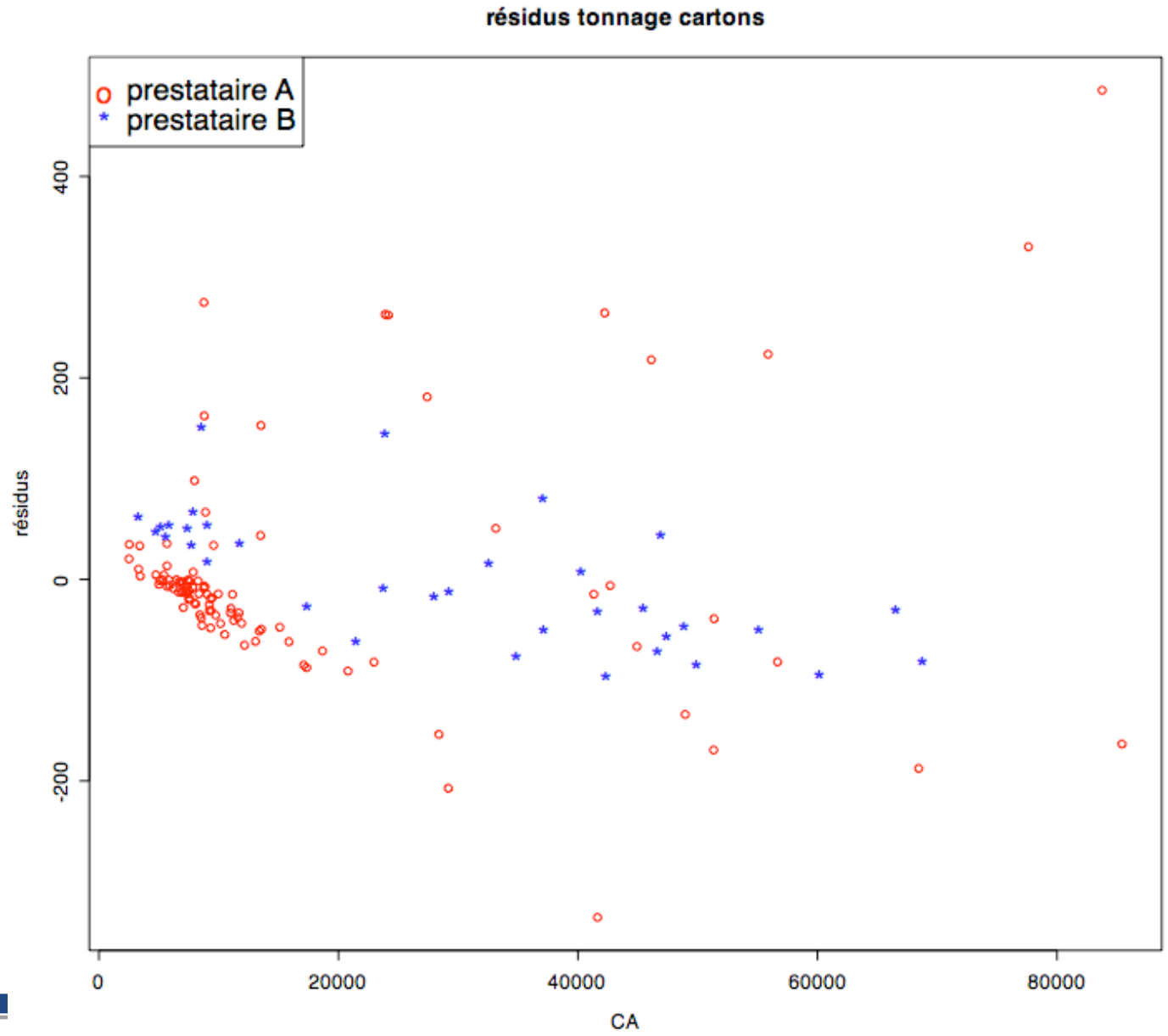
modèles polynomiaux : cartons ~ f(CA)



Premier modèle

```
lm(formula = cartons ~ CA + surface + categorie + prestataire,
    data = dechets)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-335.36  -43.78  -12.45   16.03  485.52

Coefficients:
                 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     25.722738  54.069053   0.476   0.6350
CA               0.010893   0.001506   7.235 3.41e-11 ***
surface         -0.020421   0.011541  -1.769   0.0791 .
categoriesuper -49.420383  45.824569  -1.078   0.2828
prestataireB   -22.096807  22.645039  -0.976   0.3310
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 101.3 on 132 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.7451,   Adjusted R-squared: 0.7373
F-statistic: 96.45 on 4 and 132 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

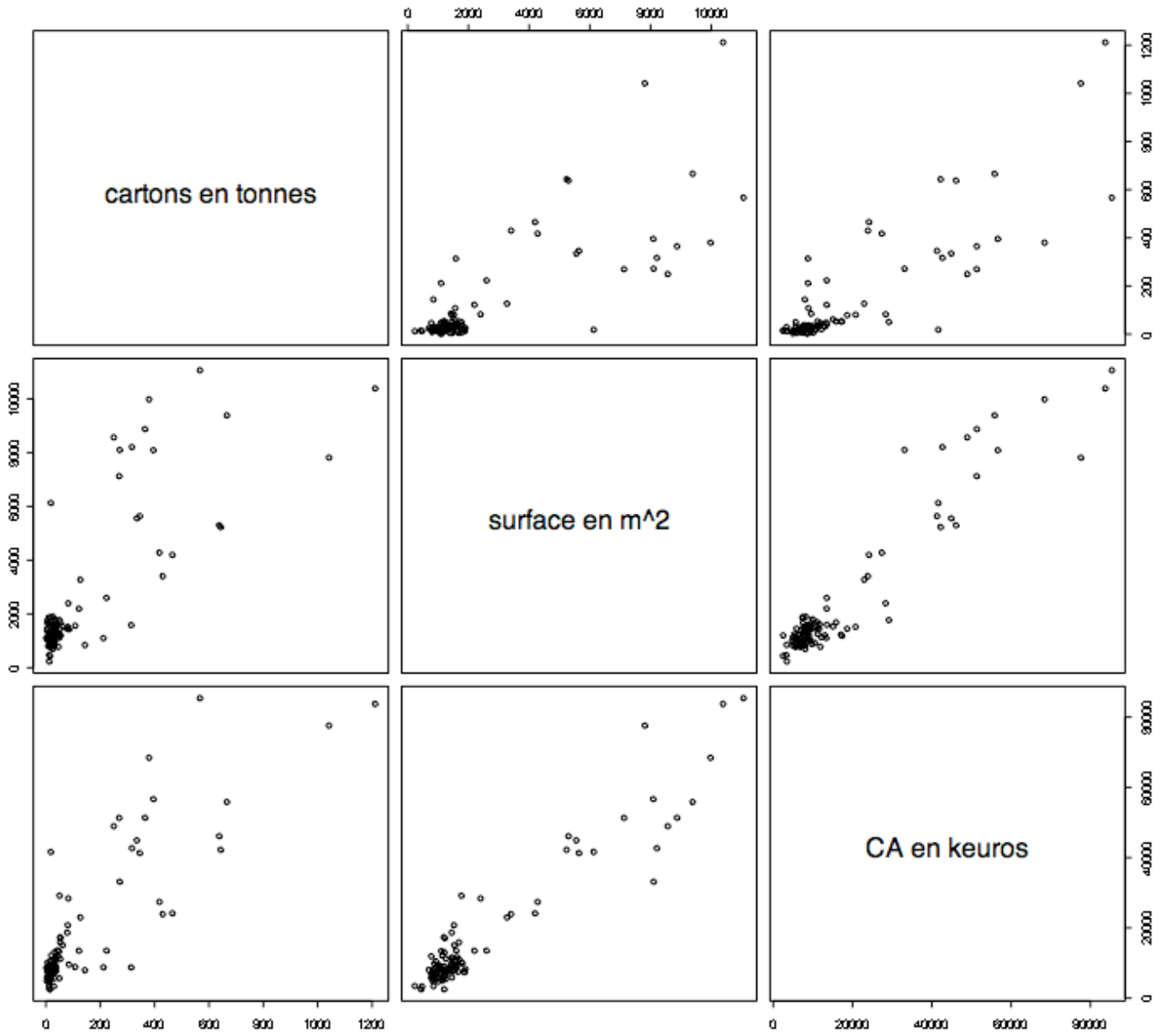
résidus premier modèle



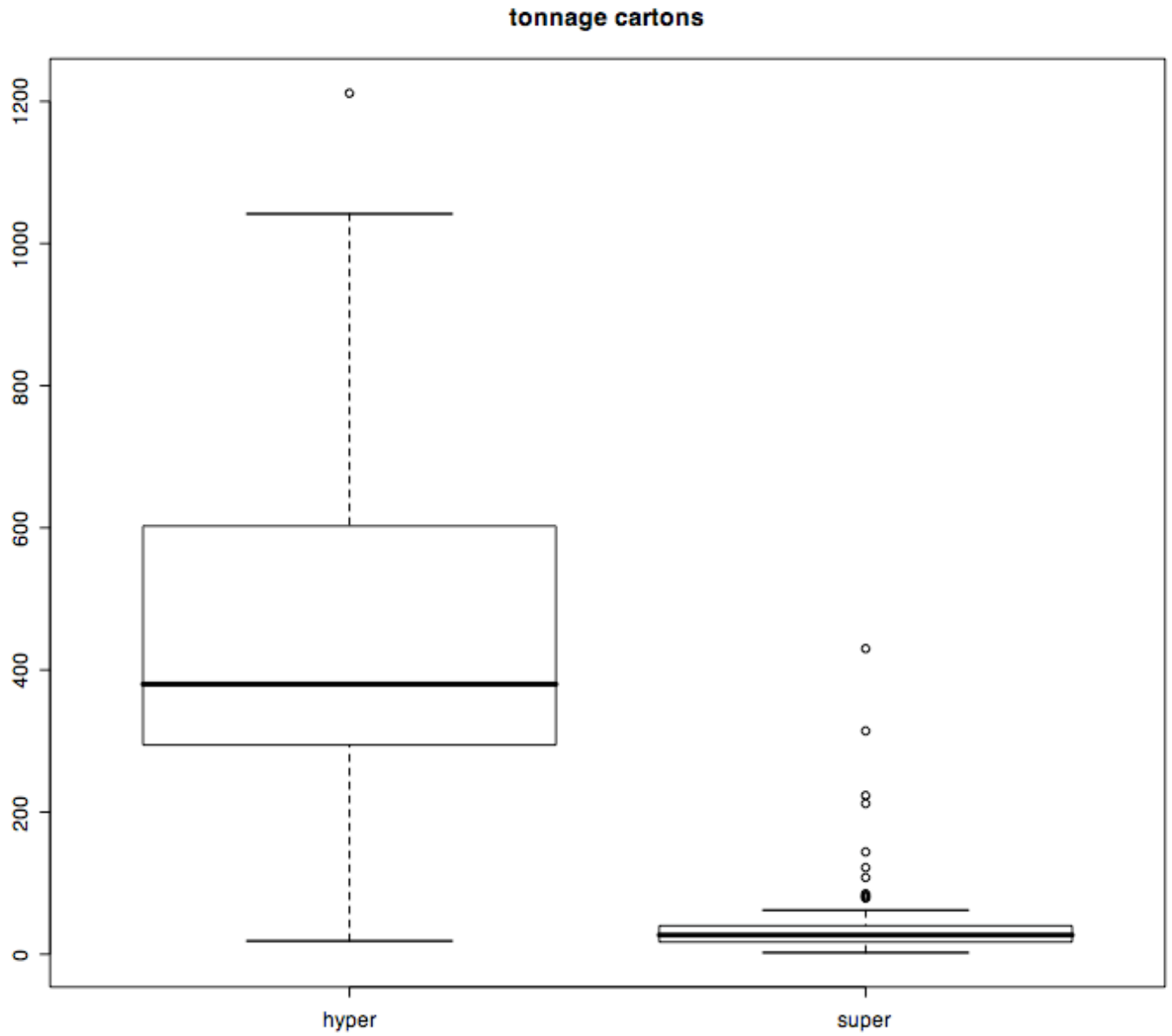
Remarques

- Résidus de variance dépendant du prestataire
- Problème de biais pour de petits CA
- Deux décisions :
  - Séparer les données par prestataire
  - Passage éventuel au log

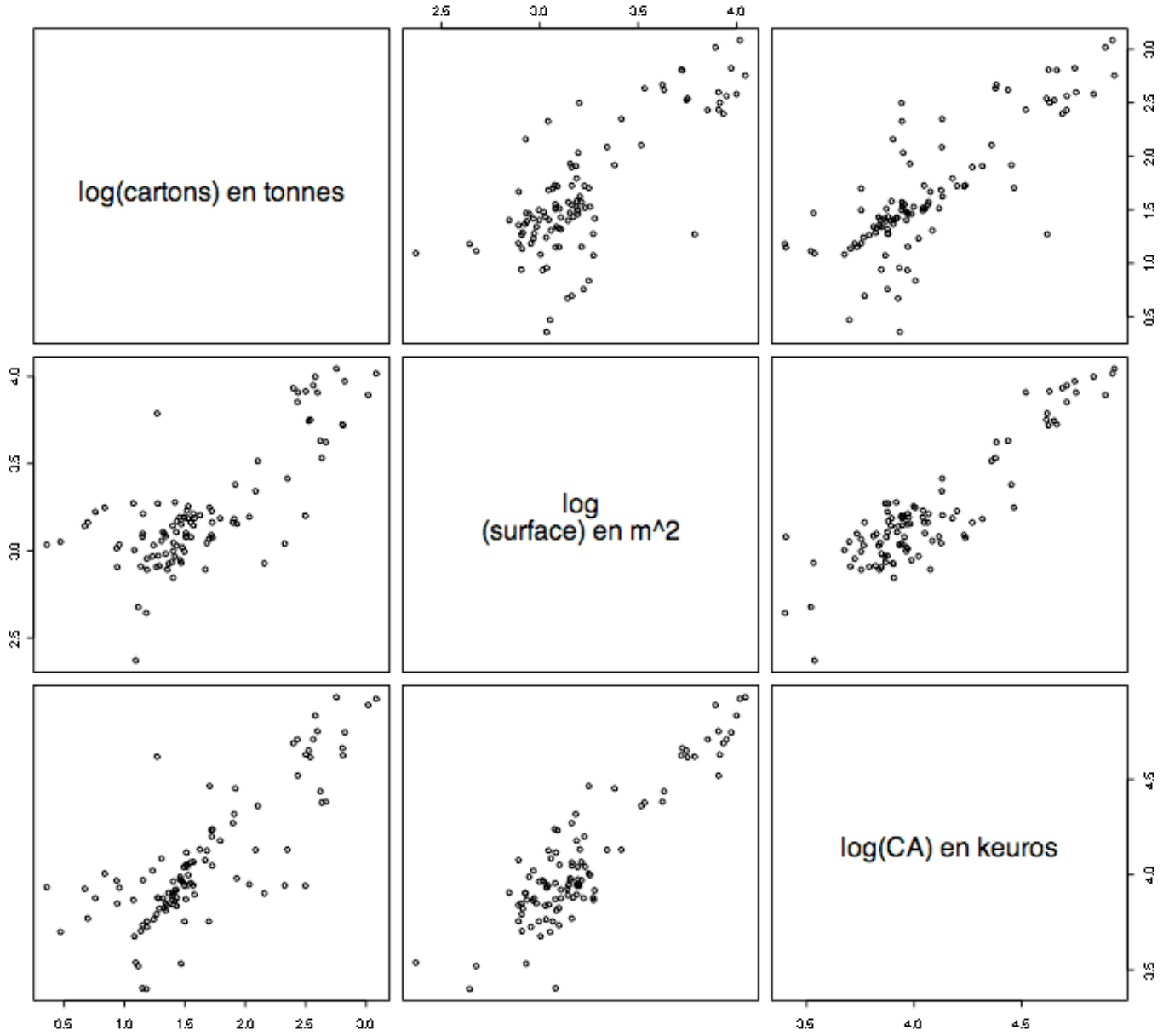
pairs(cartons~surface+CA) - prestataire A



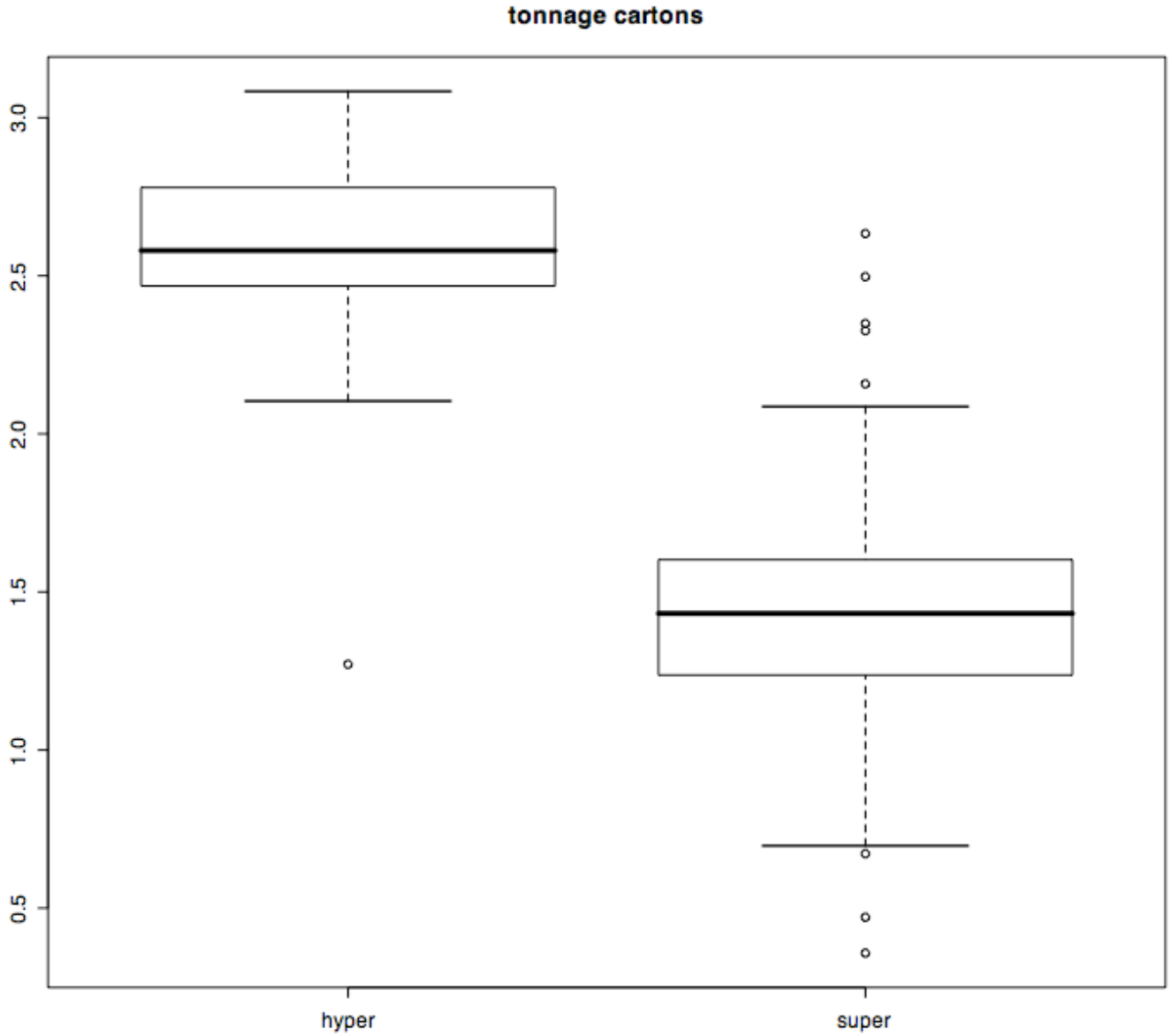
boxplot(cartons~categorie) - prestataire A



pairs(cartons~surface+CA) - prestataire A- log10



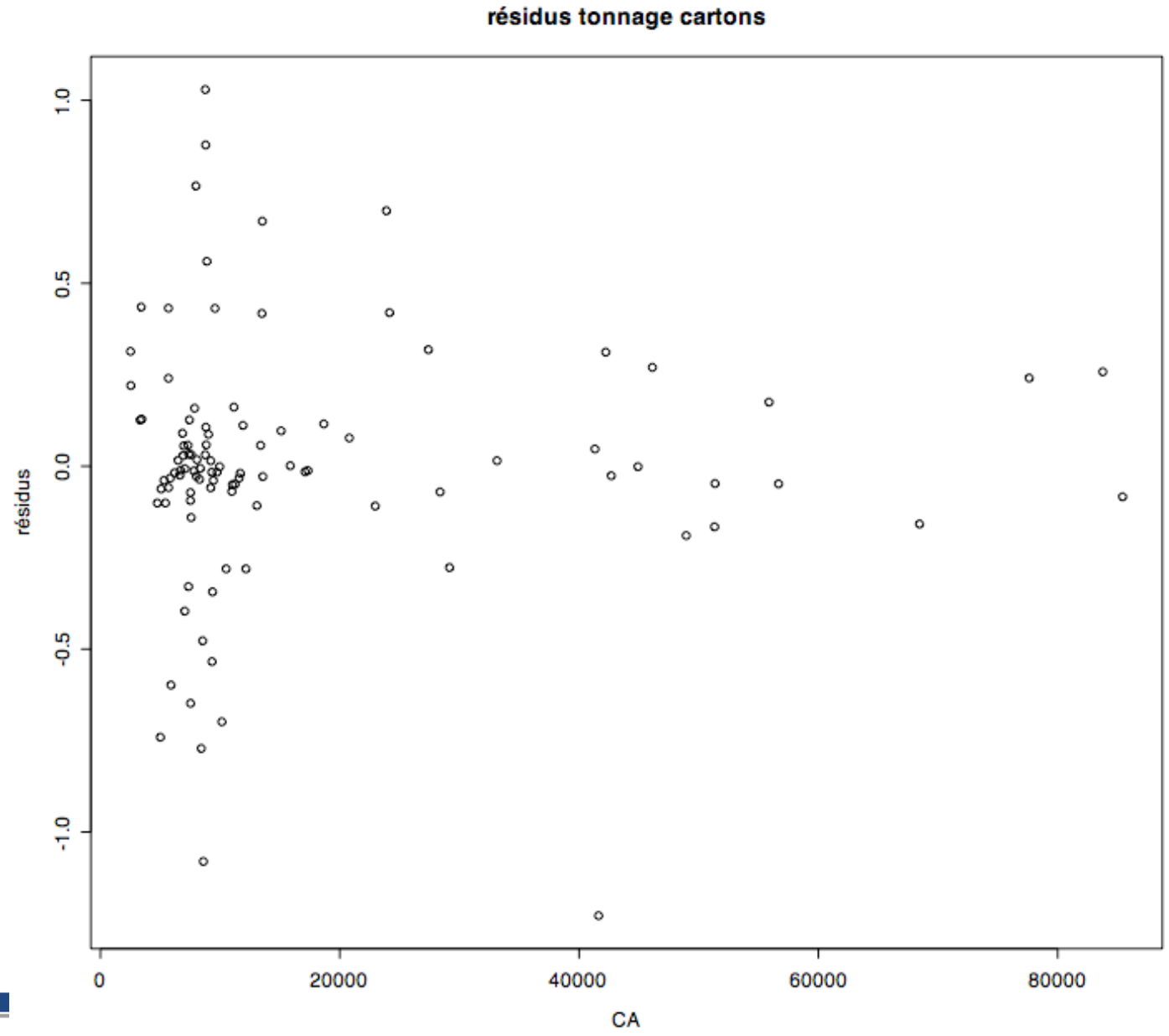
boxplot(log10(cartons)~categorie) - prestataire A



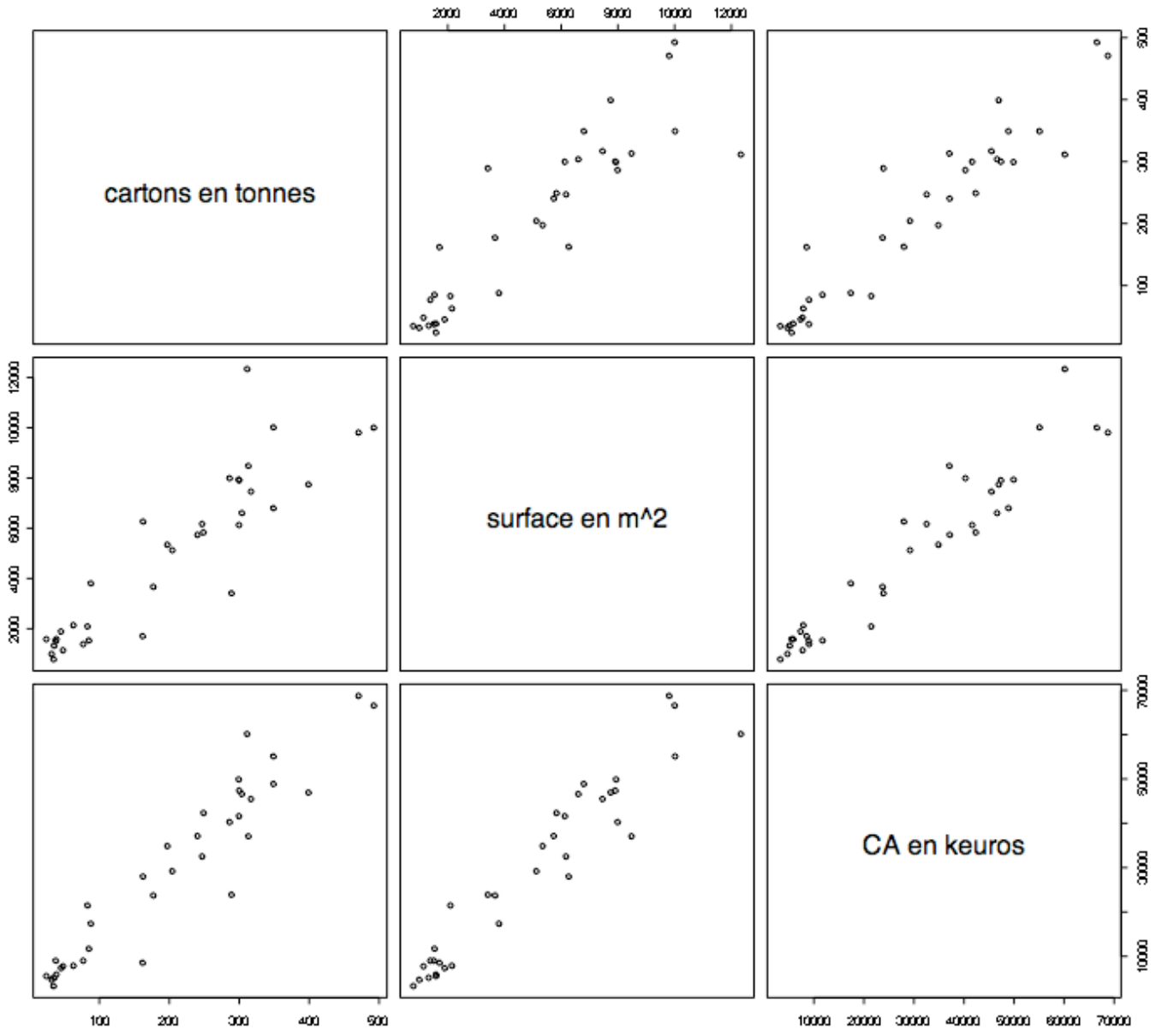
Modèle pour les log - prestataire A

```
lm(formula = log10(cartons) ~ log10(CA) + log10(surface) +
   categorie,
    data = dechetsA)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.22837 -0.07155 -0.01158  0.11457  1.02941

Coefficients:
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     -2.4924     0.9084  -2.744  0.00722 **
log10(CA)        0.9725     0.2382   4.082  9.1e-05 ***
log10(surface)   0.1320     0.2809   0.470  0.63941
categoriesuper  -0.2964     0.1857  -1.596  0.11372
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.3474 on 98 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.6625,   Adjusted R-squared: 0.6521
F-statistic: 64.12 on 3 and 98 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

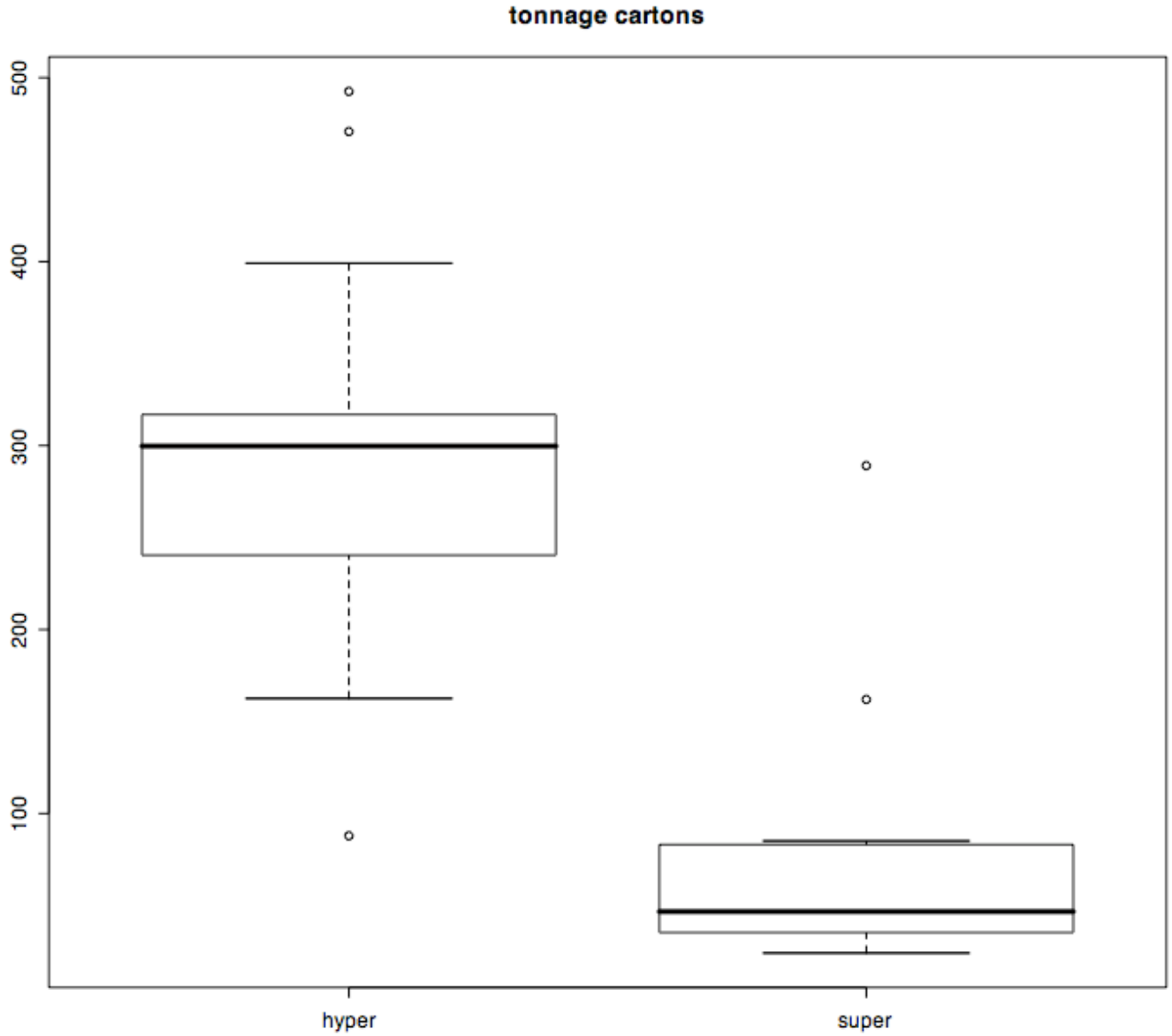
résidus de ce modèle - prestataire A



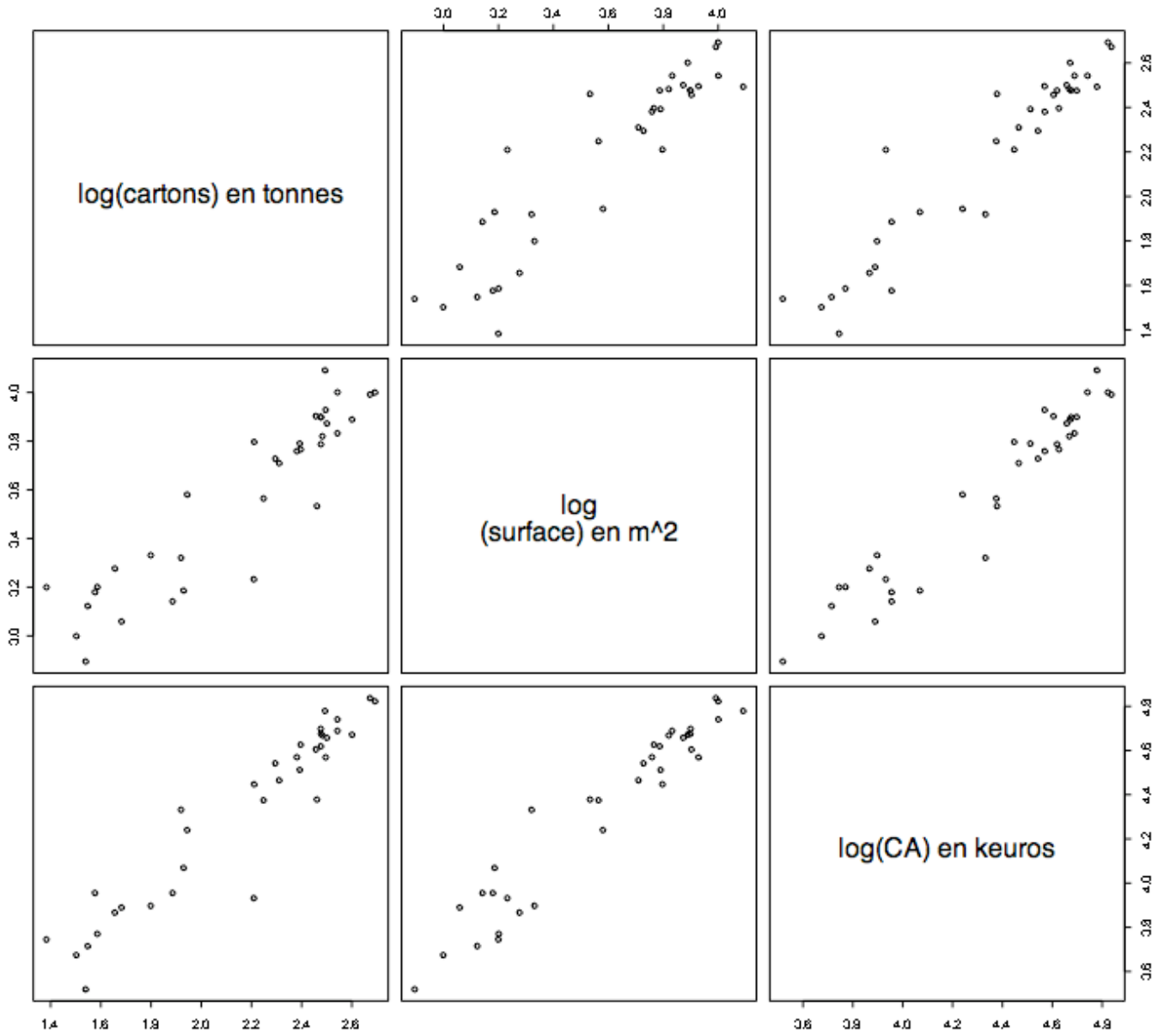
pairs(cartons~surface+CA) - prestataire B



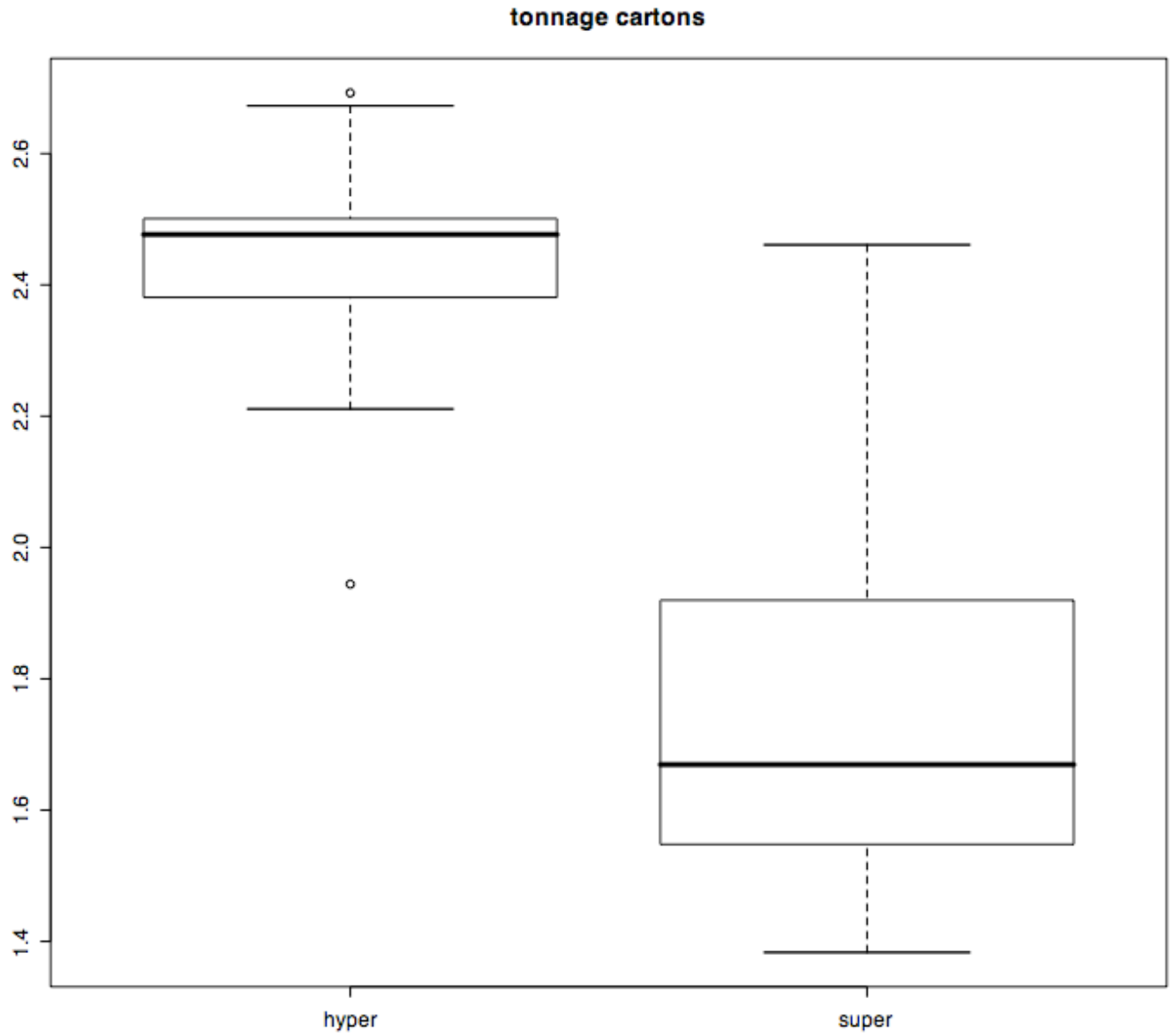
boxplot(cartons~categorie) - prestataire B



pairs(cartons~surface+CA) - prestataire B- log10



boxplot(log10(cartons)~categorie) - prestataire B



Modèle pour les log - prestataire B

```
lm(formula = log10(cartons) ~ log10(CA) + log10(surface) +
   categorie,
    data = dechetsB)

Residuals:
      Min         1Q    Median         3Q        Max
-0.254735 -0.049060 -0.001419  0.041061  0.417644

Coefficients:
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     -2.3793     0.6175  -3.853 0.000549 ***
log10(CA)        0.9259     0.2139   4.330 0.000145 ***
log10(surface)   0.1416     0.2814   0.503 0.618407
categoriesuper   0.0725     0.1121   0.647 0.522447
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1294 on 31 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.9052,   Adjusted R-squared: 0.896
F-statistic: 98.68 on 3 and 31 DF,  p-value: 5.992e-16
```

résidus de ce modèle - prestataire B